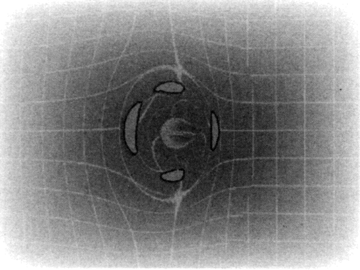
# 一般相対性理論

Allgemeine Relativitätstheorie
von
Torsten Fließbach



Torsten Fließbach 著

杉原　亮・庄司多津男・南部保貞 訳

共立出版

Allgemeine Relativitätstheorie
by Torsten Fließbach

Original German language edition published by Specktrum Akademisher Verlag.


Japanese translation published by arrangement with Torsten Fliessbach
through Modest Agency.

# まえがき

この本は，ジーゲン(Siegen)大学で行った一般相対性理論の授業がもとになっている．対象は力学と電気力学を修得した物理学科の学生であるが，また，一般相対論への入門書としても役に立つだろう．内容は普通の物理の授業のレベルであり，相対性理論の説明としてはかなりわかりやすいはずである．この本では，形式的な証明や数学的な厳密さよりも直観的な説明や具体的な例を重視している．そして説明に役立つと思うときには電気力学との関連をくわしく述べることにした．読者が馴染んでいるこの理論との類似性およびそれとの相違を適切に使って理解を容易にし，さらには読者に理論物理学の全分野を統一的に理解する足がかりを与えたい．

この本の導入部はワインバーグ(Steven Weinberg)の本 *Gravitation and Cosmology*[文献 1] にならっており，よく似た数学的な手法を使った．さらにゼクセル(Sexl)とウルバントケ(Urbantke)の本 [文献 2] からいくつかのヒントを得た．一方，非常に包括的なテキスト *Gravitation*[文献 3] がマイスナー(Misner)とソーン(Thorne)，ウィーラー(Wheeler)によって書かれている．さらにはリンドラー(Rindler) [文献 4]，ステファニ(Stephani) [文献 5]，ケニオン(Kenyon) [文献 6] の教科書も推薦に値する．加えて，力学の基礎に関しては必要に応じて著者の *Mechanik* (力学) [文献 7] を引用する[1]．

さて，これまでの実験はすべて一般相対論の予測と一致しており，実験値の誤差は年々小さくなってきている．この本に紹介したそれらの実験結果は，ほとんどウィル(Will)の広範なレビュー [文献 8, 文献 9] から引用した．

---

[1] 訳注：[文献 7] の邦訳はないが，本書の説明が適切であるため特にこの文献を参照する必要はない．読者が必要性を感じるところでは，通常の力学の教科書で十分にカバーできる．

さらに，いくつかの節では適宜特別な文献リストが与えられる．それは最新論文のソースとして物理学者がもっともよく利用する電子文献(eprint archiv) www.arxiv.org である．一方，現時点での問題に関する幅広い展望については，ホール(Hall)とプルハム(Pulham)の論文撰集 [文献 10] が答えてくれるであろう．

第 3 版（独語原著）(1998)に比べて第 4 版(2003)では間違いがいくつか改められ，たくさんの個所で加筆，修正がなされた．宇宙論に関する X 章では，比較的長い文章がいくつか書き換えられた．1990 年代における新しい天文学の観測結果（ハッブル宇宙望遠鏡などを考えてみよ）によっていくつもの宇宙定数が修正され，改善された．新しい定数の一部は明らかにこれまでの値と異なっている．このことは現在の（そして未来の）宇宙に関するわれわれのイメージを変えてしまった．

最後に，これまでの版の読者の方々に貴重なコメントのお礼を申し上げる．

2002 年 11 月

トールステン・フリースバッハ（Torsten Fließbach）

## 参照文献


1. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, New York 1972
2. R. U. Sexl and H. K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie,* 4. Auflage,（重力と宇宙論 第 4 版）, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1995
3. C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco 1973
4. W. Rindler, *Essential Relativity*, 2nd edn., Springer Verlag, New York 1977 (rev. printing 1990)
5. H. Stephani, *Allgemeine Relativitätstheorie,* 4. Auflage（一般相対性理論 第 4 版）, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1991
6. I. R. Kenyon, *General Relativity*, 2nd edn., Oxford University Press, 1990
7. T. Fliessbach, *Mechanik*, 3. Auflage（力学 第 3 版）, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1999
8. C. W. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, 2nd. Ed., Cambridge University Press, 1993
9. C. W. Will, *The confrontation between General Relativity and Experiment*, ⟨www.arxiv.org⟩ arXiv:gr-qc/0103036 [2)]
10. G. S. Hall and J. R. Pulham (Eds.), *General Relativity*, SUSSP Publication Edinburgh and IOPP, Bristol 1996


---

[2)] 訳注：最初の 2 桁の数字は年（したがって 2001), つづく 2 桁の数字は月（したがって 3 月）を示す.

# 訳者のことば

物理学科の学生にとって量子力学と相対性理論は憧れである．そして前者は必須科目として否応なく履修させられ，実際その後もこれなくしては如何なる分野の研究もできないほど役に立つ学問である．一方，相対性理論，特に一般相対性理論は重力理論，宇宙論の専門家を除けば，実用的とは言えない学問である．しかし，その理論の美しさ故に若い学生にとってはマドンナに対するような憧れがある．ここに述べたことは訳者のうちの二人（杉原，庄司）の心情を表している．この二人はプラズマ物理を専門とする研究者で，学生のころは一般相対論はカリキュラムに入っておらず，その匂いもかがせてもらえなかった．そのフラストレーションは長い間つづいたが，近年ひとり（杉原）が定年となり，時間に余裕ができるようになって積年の望みが達せられることになった．

そこで勉強するためのテキストを探すことになったが，実際にいろいろな本を手に取ってみるとどれもこれもむずかしい．日本人学者の立派な本が幾つもあるが，権威ある学者の本ほど取っつき難く，素っ気ない．英語の本は，アメリカ流の膨大なページのものか，例が多すぎてかえってわかりにくいもの，数式の塊のようなものが目に付く．とうとうドイツ語の本にまで目を通すことになった．そしてそのなかでフリースバッハ教授のこの本に引きつけられた．ドイツ流のいかにも教科書的な書き方であるが，じつに丁寧である．重ねて学生のウイークポイントを隅々まで知り尽くしている書き方である．しかも，これが大事なことであるが，著者は相対論，宇宙論の専門家ではない．したがって，専門家ではないわれわれのサイドに立って，何とか理解させようと苦心しているのがじつによくわかる．本人が自分で勉強してそのむ

ずかしさがわかり，それをかみ砕いて伝えてくれるのである．フリースバッハ教授は超低温物理を専門とする物理学者で，理論物理学教科書のシリーズを書いておられる博識な学者である．その知識をフルに使って一般相対論に導いてくれる．話がむずかしくなるといつも始めに戻って解説してくれるのである．教授は授業にこの本をテキストとして使い，学生が理解できたかどうかを確かめ，理解が不十分だと感じた部分を書き改めて数年ごとに改訂を重ねたと話しておられる．これが 1990 年の初版から現在までに 3 回の改訂版を出版した理由だそうである．ただ著者の熱意だけでこれだけの改訂版が出版できるわけではあるまい．ドイツ国内にこの著者の熱意に共鳴する読者層があることを予想させるのである．

この本を勉強するうちに訳者たちと同じ思いの学生諸君，研究者諸氏がおいでになることがわかってきた．それでこの本を紹介しようという思いが昂じて翻訳を思いたった．そうなると非専門家二人では心許ないので専門家（南部）の参加となった．かくして内容の正確さが保証されたと思っている．

著者の序言にもあるが，ここでこの本の特徴を整理しておこう．

○ 講義がもとになっている．したがって各節がコンパクトにまとまっている．

○ 力学と電気力学の履修を前提としている．ただし，力学はニュートンの基本法則，電気力学はマクスウェルの方程式をきちんと理解していればよい．

○ 数学としては，これまでに慣れ親しんだ道具（微分積分）を出発点として，相対論にどうしも欠かせないテンソル解析やリーマン空間の概念が導入されるが，自然に連れていかれるという感じでほとんど抵抗がない．むしろ，テンソル解析やリーマン幾何学の入門書としても使えるかもしれない．

○ さらに，数学的な道具の使用は，理論の正確さが損なわれない最低限ですまされている．

○ 2004 年現在の観測結果が随所で使われている（訳業の期間に著者から提供していただいた）．

○ 演習問題の解答が親切で，むしろ例題の解説の趣がある．理解を深める意味でぜひ利用してほしい．

相対論は美しい学問である．その美しさをチャンドラセカールとランダウは "the most beautiful theory that ever was." と賛嘆した．空間が曲がっている，時間が重力場では遅くなる，ブラックホールからは光が出てこない，などなど疑問の余地なく示されると，卑近な言い方ではあるが目からうろこが落ちるような感じがする．読者諸氏がこのような感慨に浸っていただければ幸いである．

ここで "訳注" に触れておく．読者が何ら本質的でないところでつまずいたり，引っかかったりすることを避けるために "訳者による注" をつけた．場合によっては自明の説明になったかもしれないが，訳者の老婆心と思って許していただきたい．ドイツと日本における物理学の履修カリキュラムの違い，または慣習の違いのために本文中の説明にやや不十分さを感じるところがいくつかあった．それらを補うためにも訳注を利用した．

本書は内容的に 2 部に別れている．6 章までが 1 部でそこでは一般相対性理論の構築を主としている．2 部は理論の応用に使われている．重力波，パルサー，超新星，ブラックホール，標準的宇宙モデルなどがその例である．訳者の実感では，宇宙をこの相対論でどこまで理解できるか，その壮大な取り組みに胸が熱くなる思いがした．有名なアインシュタインの宇宙項が，現在の宇宙で主役を演じ，未来の宇宙ではますます支配的になるという予測が示されると，その導入を誤りだとしたアインシュタインの胸中はどうであったかと思わず感慨に浸ったりした．原著者と訳者の意気込みを感じ取っていただければ幸いである．

ただ気懸かりなことは訳者の力不足のために原著者の考えを十分に伝えることができたかどうかということである．原著者と連絡を取り合って誤りがないよう気を付けたつもりであるが，もし読者諸兄において誤りに気がつかれたならば遠慮なくご連絡いただきたい．もし版を重ねることができれば，その際に訂正させていただくことにしたい．

この本の訳業にあたっては共立出版編集部の諸氏，ことに石井徹也氏に一

方ならぬお世話になった．これらの方々に厚くお礼を申し上げたい．

2005 年 9 月

訳者一同

# 目　次


**まえがき** *i*

**訳者のことば** *v*

**I　はじめに** *1*

1　ニュートンの重力理論 . . . . . . . . . . . . . . . . . . *1*

2　一般相対性理論の目的 . . . . . . . . . . . . . . . . . . *4*

**II　特殊相対性理論** *7*

3　ローレンツ変換 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *7*

4　相対論的力学 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *17*

5　ミンコフスキー空間のテンソル . . . . . . . . . . . . . . *23*

6　電気力学 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *29*

7　相対論的流体力学 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *34*

8　エネルギー運動量テンソル . . . . . . . . . . . . . . . . *40*

**III　一般相対性理論の物理的な基礎** *47*

9　基準系 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *47*

10　等価原理 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *57*

11　重力場中の運動 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *63*

12 重力赤方偏移 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
13 幾何学的な見方 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79

IV 一般相対性理論の数学的基礎 87

14 リーマン空間のテンソル . . . . . . . . . . . . . . . 87
15 共変導関数 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 94
16 平行移動 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 98
17 一般化されたベクトル演算 . . . . . . . . . . . . . . 105
18 曲率テンソル . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110

V 一般相対性理論の基礎法則 119

19 共変原理 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119
20 重力を入れた法則 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 128
21 アインシュタインの場の方程式 . . . . . . . . . . . 137
22 場の方程式の構造 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 146

VI 静的な重力場 155

23 等方で静的な計量 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 155
24 シュワルツシルト計量 . . . . . . . . . . . . . . . . 161
25 中心力場における運動 . . . . . . . . . . . . . . . . 166
26 光の湾曲 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175
27 近日点移動 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 179
28 レーダーの反射波の遅れ . . . . . . . . . . . . . . . 186
29 測地線歳差 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 190
30 ティリング–レンゼ効果 . . . . . . . . . . . . . . . 195
31 一般相対性理論の検証 . . . . . . . . . . . . . . . . 205

VII 重力波 211

32 平面重力波 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 211

33　重力波中の粒子 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 219
34　重力波のエネルギーと運動量 . . . . . . . . . . . . . . . 223
35　4 重極放射 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 228
36　重力波の源 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 238
37　重力波の検証 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 250

## VIII　星の静的モデル　259

38　星の平衡 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 262
39　シュワルツシルトの内部解 . . . . . . . . . . . . . . . . 274
40　相対論的な星 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 281
41　ニュートン的な星 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 287
42　白色矮星 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 291
43　中性子星，パルサー . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 297

## IX　星の動的モデル　303

44　時間に依存する等方な計量とバーコフの定理 . . . . . . . . . 303
45　シュワルツシルト半径 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 308
46　ガウス座標における時間に依存する等方な計量 . . . . . . . 313
47　重力崩壊，超新星 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 316
48　ブラックホール，準星 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 326

## X　宇宙論　341

49　宇宙原理とロバートソン－ウォーカー計量 . . . . . . . . . 341
50　赤方偏移と距離の関係 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 350
51　宇宙における距離はしご . . . . . . . . . . . . . . . . . 358
52　宇宙モデル . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 365
53　宇宙の状態 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 375
54　標準的宇宙モデル . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 386

**演習の解答** *401*

**索　引** *431*

# I　はじめに

## 1　ニュートンの重力理論

ニュートン(Newton)は 1687 年 "自然哲学の数学的諸原理" を出版し，そのなかで力学と重力理論を取り扱っている．ニュートンの重力理論は物理学の統一に対する重要な一歩である．すなわち，それは落下の法則とケプラー(Kepler)の法則をたった一つの理論の枠組みのなかで説明している．
一般相対性理論はニュートン重力理論の一般化である．よって，われわれはニュートン理論の簡単な導入から始めることにする．

ニュートン重力理論ではお互い引き合っている $N$-個の質点の運動は

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \frac{m_i\, m_j\, (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^3} \tag{1.1}$$

のように記述される．ここで $\boldsymbol{r}_i(t)$ は時間 $t$ における $i$-番目の質点の位置であり，$m_i$ はその質量である．重力定数 $G$ は実験的に次のように定められている[1)]．

$$\boxed{G = (6.673 \pm 0.010) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\, s^2} \qquad \text{重力定数}} \tag{1.2}$$

(1.1) に導入された重力について次のことが成り立つ．

---

1) CODATA recommended values of the Fundamental Physical Constants: 1998, J. Phys. Chem. Ref. Data 28 (1999) Nr.6. 重力定数を決める方法の概要は G. T. Gillies の論文 Rep. Progr. Phys. 60 (1997) 151 に与えられている．

- それは引力で，ベクトル $\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$ の方向に働く．
- それは二つの質量の積に比例する．
- それは距離の二乗に反比例して減少する．

関係式(1.1)はニュートン重力理論の基本方程式とみなすことができる．たとえば，物体の放物運動、ケプラーの楕円運動、そして彗星の軌道はこの式で記述できる．われわれはこの基本方程式を変形して，求めている一般化により適している形にする．そのためにまずスカラーの重力ポテンシャル $\Phi(\boldsymbol{r})$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = -G \sum_j \frac{m_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|} = -G \int d^3r' \, \frac{\varrho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{1.3}$$

を導入する．上の記述ではそれぞれの場所での質量密度 $\varrho$ の寄与 $dm = \varrho(\boldsymbol{r}')\, d^3r'$ が寄せ集められている．さて(1.1)式において $i$ 番目の質点に注目し，その軌道ベクトルを $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_i(t)$ と書くことにする．すると(1.1)と(1.3)から

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = -m \nabla \Phi(\boldsymbol{r}) \qquad \text{ニュートン理論における運動方程式} \tag{1.4}$$

となる．これが重力場における粒子の**運動方程式**である．重力場 $\Phi(\boldsymbol{r})$ は他のすべての質量から決まる．(1.3) から $\Phi(\boldsymbol{r})$ に対する**場の方程式**

$$\Delta \Phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G \varrho(\boldsymbol{r}) \qquad \text{ニュートン理論における場の方程式} \tag{1.5}$$

が出る．これは 2 階の線形偏微分方程式である．この式で場の源として物質密度 $\varrho(\boldsymbol{r})$ が右辺に現れている．以後，(1.4)と(1.5)をニュートン重力理論の基本方程式と見なすことにする．

方程式(1.5)と(1.4)とは静電気学の場の方程式

$$\Delta \Phi_e = 4\pi \varrho_e \tag{1.6}$$

と荷電粒子の非相対論的運動方程式

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = -q \nabla \Phi_e \tag{1.7}$$

と同じ構造をしている．ここで $\varrho_e$ は電荷密度，$\Phi_e$ は静電ポテンシャルである．相互作用定数として電荷 $q$ が (1.7)に現れているが，$q$ は(1.7)の左辺の質量 $m$ と無関係な量である．すなわち，質量 $m$ と電荷 $q$ は考えている物体のもつ独立な量である．このことから考えると，重力と結びついている**重力質量**（(1.4)式の右辺の $m$ ）は**慣性質量**（(1.4)式の左辺の $m$ ）とは異なっていてもいいかもしれない．仮にそうであるとしても，このことはニュートン重力理論の構造を変えない．しかしながら，重力は慣性質量に比例するということが高い精度で実験的にわかっている．ガリレイ(Galilei)はこのことを“すべての物質は同じ速さで落下する”と定式化した．これが成り立つかぎり重力質量と慣性質量とは互いに等しい．この同等性がニュートン理論に現れているのは，言ってみれば偶然である．これとは対照的に一般相対論では，このことは本質的に重要な出発点である．

ニュートン重力理論の方程式(1.4)と(1.5)は多くの目的にとって十分役に立つ．月への航行の計算はその例である．しかしながら，それらは相対論的でないから厳密には成り立たないことはまた明らかである．今日では，ニュートン重力理論はある一般理論の極限と考えられている．そしてアインシュタイン(Einstein)の一般相対論はそのような一般理論の一つである．

# 2 一般相対性理論の目的

一般相対性理論の目的はニュートン重力理論(1.4), (1.5)の相対論的一般化である．この一般化は静電気学(1.6), (1.7)から電気力学への移行と対比できる．この二つの一般化の違いと類似を簡単に述べることで，これから求めようとしている重力理論の大まかな構造を記述できる．

これからの議論では特殊相対論と電気力学の知識を前提とする．次節以降でのやり方とは異なり，ここで導入されるいろいろな量についてくわしくは説明しない．しかし次のII章で，一般相対論の説明に必要な特殊相対論と電気力学のあらましをややくわしく述べることにする．

静電気学のよく知られた相対論的一般化，すなわち電気力学への一般化を簡単に示す．電荷が関係した力学では，電荷密度 $\varrho_{\rm e}(\boldsymbol{r},t)$ とポテンシャル $\Phi_{\rm e}(\boldsymbol{r},t)$ は時間 $t$ に依存する．もし今， $\varrho_{\rm e}=\varrho_{\rm e}(\boldsymbol{r},t)$ と $\Phi_{\rm e}=\Phi_{\rm e}(\boldsymbol{r},t)$ を(1.6)に単純に代入すると遠隔作用則を得る．すなわち，ある場所の電荷密度 $\varrho_{\rm e}$ が変化すると他のすべての場所の場 $\Phi_{\rm e}$ が同時に変化することになってしまう．実際はこのような変化は光速 $c$ で伝わるので，(1.6)のラプラス演算子は次のようにダランベール演算子に置き換えられなければならない．

$$\Delta \quad \Longrightarrow \quad \Box=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta \tag{2.1}$$

考えている慣性系を，相対運動している別の慣性系から見ると，電荷密度 $\varrho_{\rm e}$ は必然的に電流密度に結びつく．すなわち，電荷密度と電流密度は互い移り変わる．よって完全な理論では，次のように電流密度 $j^\alpha$ が電荷密度 $\varrho_{\rm e}$ の代わりに入る．

$$\varrho_{\rm e} \quad \Longrightarrow \quad (\varrho_{\rm e}c,\ \varrho_{\rm e}v^i)=(j^\alpha) \tag{2.2}$$

この場合，$v^i$ は速度 $\boldsymbol{v}$ のデカルト座標成分である[1]．源の項(2.2)の一般化はポテンシャルのよく似た一般化

$$\Phi_{\rm e} \quad \Longrightarrow \quad (\Phi_{\rm e},\ A^i)=(A^\alpha) \tag{2.3}$$

[1] 訳注：デカルト座標は直角座標の意．

に対応している．その結果，場の方程式の相対論的一般化は

$$\Delta \Phi_{\mathrm{e}} = -4\pi \varrho_{\mathrm{e}} \quad \Longrightarrow \quad \Box A^{\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^{\alpha} \tag{2.4}$$

のように書かれる．右側の四つの方程式のうち $\alpha = 0$ に対する成分は左側の静電気学の方程式に帰着する．右側の方程式はマクスウェル方程式に等しい．これらの式はポテンシャルのゲージ条件と，相対論的に一般化された運動方程式によって補完されなければならない（6 節）．与えられた源の項に対してそれらの式は遅延ポテンシャルの解をもつ．

静電気学とニュートン重力理論とは同じ数学的構造をもっているので，同じやり方で重力理論を一般化できそうに思える．(2.1)–(2.4) のやり方を参考にして，二つの理論の一般化に関する類似と相違を簡単に述べることにする．

まず，(2.1) を (1.5) に代入する．最初にすることは (2.2) に対応する質量密度の一般化である．最初の本質的な違いがここで起こる．すなわち，粒子の電荷は粒子の運動に依存しない．このことは粒子の質量にはあてはまらない．例として水素原子を考えよう．水素原子は陽子（静止質量 $m_{\mathrm{p}}$，電荷 $q_{\mathrm{p}} = e$）と電子（静止質量 $m_{\mathrm{e}}$, 電荷 $q_{\mathrm{e}} = -e$）とで成り立っている．原子の内部では，電子と陽子とは有限の速さをもっている．原子の電荷は $q = q_{\mathrm{p}} + q_{\mathrm{e}} = 0$ であるが，質量に関しては $m \neq m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}}$ である．この事実は，正確には，電荷はローレンツ (Lorentz)・スカラー[2)]であるということを意味している．したがって，電荷を (静止電荷といった条件をつけなくて) 素粒子に割り当てることができる．これに対して静止質量が素粒子の特性である．

電荷はローレンツ・スカラーであるので，電荷密度 $\varrho_{\mathrm{e}} = \Delta q/\Delta V$ はローレンツ・ベクトル（電流密度 $j^{\alpha}$）の第 0 成分と同じように変換する．なぜなら，$1/\Delta V$ は長さの収縮による係数 $\gamma$ に比例するからである[3)]．一方，$\varrho_{\mathrm{e}}$ とよく似たエネルギー質量密度 $\varrho = \Delta m/\Delta V$ は，エネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ と呼ばれるローレンツ・テンソルの 00 成分として変換される．このことは，エネルギー自身，ある 4 元ベクトル（4 元運動量 $p^{\alpha}$，4 節）の第 0

---

[2)] 訳注：ローレンツ・スカラー，ローレンツ・ベクトル，ローレンツ・テンソルについては 5 節参照．

[3)] 訳注：運動は一次元的であるので $1/\Delta V$ は $\gamma$ に比例する．

成分であるためである．したがって(2.2)式に次式

$$\varrho \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \varrho\, c^2 & \varrho\, c\, v^i \\ \varrho\, c\, v^i & \varrho\, v^i\, v^j \end{pmatrix} \sim (T^{\alpha\beta}) \tag{2.5}$$

が置き換わる．ここできちんと導入されなかったいくつかの量（エネルギー質量密度やエネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$）は 7 節で定義される．重力ポテンシャル $\Phi$ も同様なやり方で上付の添字が二つある量に一般化されることを，(2.5)の置き換えは示唆している．そして，この量 $g^{\alpha\beta}$ は計量テンソルと呼ばれる．このことから次の重力の相対論的方程式

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad \Longrightarrow \quad \Box g^{\alpha\beta} \sim G\, T^{\alpha\beta} \tag{2.6}$$

が得られる．右式の定数は静的な場合に 00 成分が左側の式と一致するように決められる．弱い場に対しては実際に同じ形の相対論的な場の方程式が得られる．

質量とエネルギーの等価性のために，電気力学では起こらなかった本質的な複雑さが付け加わる．すなわち，重力場はまたエネルギーを担っているのでそれは場の源になる．これは求めている正確な場の方程式を**非線形**にする．これに対して，電磁場(または光子)は電荷を担っていないので場の源にはならない．

求めている重力理論の構造を決定する本質的なポイントをまとめてみよう．

1. 一般相対論はニュートン重力理論の相対論的一般化である．ニュートン理論と静電気学が同じ構造をもっていることは，一般相対論と電気力学との間に多くの類似性を生み出すことになる．
2. エネルギー質量密度はローレンツ・テンソルの 00 成分のように変換されるから，(1.5)の一般化はテンソル場の方程式となり，電気力学のようにベクトル場の方程式にはならない．
3. 重力場はエネルギーを含んでいるので，それ自身場の源になる．これは場の方程式を非線形にする．

# II　特殊相対性理論

## 3　ローレンツ変換

一般相対論の理解には特殊相対論の知識が前提となる．以降の3節－8節で特殊相対論のもっとも重要な結果が取りまとめられている[1]．このまとめは後ほどの一般相対論の説明に必要な事項を中心にしている．

### 相対性原理：ガリレイあるいはアインシュタイン

物理的なプロセスを記述するには基準系が必要である．そしてたとえば，粒子の軌道 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ を記述するときはデカルト座標 $x$, $y$, $z$ と時間座標 $t$ が導入される．基準系は，たとえば具体的な実験室空間で与えられる．そしてたとえば，室内の一つの隅から出る三つの直交する稜線はデカルト座標系を形作り，同じく室内の時計は時間 $t$ を示す．このように基準系内に座標（直角座標，円柱座標など）を張ると，それがその基準系の座標系となる．

**慣性系**と呼ばれる特別な基準系では，物理的なプロセスは他の基準系より単純であるようにみえる．特にニュートンの運動方程式は慣性系でのみ成り立つ[2]．実験的に言えば，慣性系は恒星天に対して一定速度で動いている基準系であり，非慣性系は恒星天に対して加速している基準系である（たとえばメリーゴーランド）．

---

[1] 3節－5節の内容は著者の本 *Mechanik*（力学 第2版）[文献 7] の IX 章に比較的くわしく述べられている．

[2] 訳注：(1.4)，(1.5)の形は慣性系でのみ成り立つの意．加速度系におけるニュートン方程式については9節を見よ．

物理的なプロセスを慣性系で記述するとき，恒星天に対する系の相対速度は無関係である．この実験的な発見はガリレイによって，**相対性原理**“すべての慣性系は等価である”として法則化された．この等価性によって，基本的な物理法則はすべての慣性系で同じ形をもつということがわかる．形式的にこのことを慣性系 IS から別の慣性系 IS′ への変換のもとで法則は**共変**であるという．共変とは，ここでは形が変わらないということを意味する．すなわち，方程式はどんな慣性系でも同じ形である．われわれは，ガリレイが考えたようにまず慣性系の間の変換を考える．

慣性系 IS の**事象**は $x, y, z, t$（以下では $x^1, x^2, x^3, t$ とも書く）で規定される．たとえば時間 $t$ における粒子の場所はこれらで示されるし，また二つの粒子が時間 $t$ に衝突する場所もこれらで示すことができる．同じ事象は，別の慣性系 IS′ では別の座標 $x', y', z', t'$ をもつ．一つの事象に対する慣性系 IS の座標と慣性系 IS′ の座標の間の一般**ガリレイ変換**は

$$x'^i = \alpha^i_k x^k + a^i + v^i t \tag{3.1}$$

$$t' = t + t_0 \tag{3.2}$$

である．このとき，$x^i$, $v^i$ と $a^i$ はベクトル（たとえば単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_z$ を使ったベクトル $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$）のデカルト座標成分である．ここで**和を取る規約**を導入する．それは上についている添字と下についている添字のうち同じものについては足し合わせる約束である．一方，添字 $i$ は 1，2，3 の値のどれかを任意に取ってよい．さらに，ローマ文字は 1，2，3 を取り，ギリシャ文字は 0，1，2，3 を取るものと定めておく．

(3.1)，(3.2) では，$\boldsymbol{v}$ は慣性系 IS と慣性系 IS′ の間の相対速度を，$\boldsymbol{a}$ と $t_0$ は一定の空間的，時間的な並進を，さらに $\alpha^i_k$ は二つの系の座標軸の相対的な回転[3]を表す．行列 $\alpha = (\alpha^i_k)$ は

$$\alpha^i_n (\alpha^T)^n_k = \delta^i_k \quad \text{あるいは} \quad \alpha\,\alpha^T = 1 \tag{3.3}$$

という条件で制約されている．この行列の逆行列は転置行列と等しい，すなわち $\alpha^{-1} = \alpha^T$．このような行列は直交していると呼ばれる．条件 $\alpha\,\alpha^T = 1$

[3] 訳注：単に“回転”と書く場合には一定角度の回転を表すことにする．時間に依存するような回転はそのつど明確に述べる．

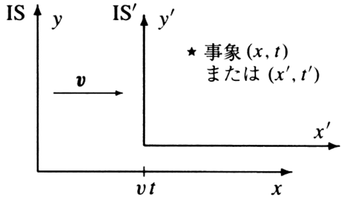



**図 3.1**: ある事象(*)が慣性系 IS で座標 $x$, $t$ をもっているとする．同じ事象は，IS に対して速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている慣性系 IS′ ではどんな座標 $x'$, $t'$ を取るだろうか？

は線素 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ の不変性を保証する．$\alpha$ で記述される回転は，三つのオイラー角で決めることができる．まとめると，(3.1) と (3.2) は 10 のパラメターをもつ変換群（ガリレイ群）を構成する．

以下では平行移動と回転を無視し，$x$ 方向の相対速度だけを取り入れる．すると図 3.1 に示されている慣性系に対するガリレイ変換

$$x' = x - vt, \qquad t' = t \tag{3.4}$$

を得る．ガリレイの相対性原理は力学で特によく成り立つ．すなわち，変換 (3.1)，(3.2) はニュートンの運動方程式の形を変えない．ゆえにその方程式は共変である．一方，マクスウェル方程式はガリレイ変換のもとでは共変ではない．というのは，マクスウェル方程式は波面が一定速度 $c = 3 \times 10^8$ m/s で進むことを示唆しているからである．よってマクスウェル自身がその方程式を非相対論的であると考えた．すなわち，マクスウェル方程式は，伝搬媒質 (たとえば，音波に対する空気) に対して停止しているある特別な慣性系でだけ成り立つのであろうと考えたのである．ところが，驚くべきことにマイケルソン (Michelson) とモーレイ (Morley) は 1887 年に，光は異なった慣性系でも同じ速さ $c$ で伝搬することを実験的に示した．それでアインシュタインは，修正された新しい相対性原理 “物理法則はマクスウェル方程式を**含めて**すべての慣性系で成り立つ” を仮定した．この**アインシュタインの相対性原理**では，慣性系間の変換は別のものにならざるをえない．すなわち，ガリレイ変換は**ローレンツ変換**で置き換えられる．このことはまた，別の力学法則が存在することを暗示する．以下でこのローレンツ変換を定めることにする．

われわれはミンコフスキー（Minkowski）座標

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z \tag{3.5}$$

によって抽象的な 4 次元空間のベクトルの成分 $x^\alpha$ を導入する．ここで 4 元ベクトルそれ自身（たとえば $\boldsymbol{r} = x^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$）は用いないで，その成分 $x^\alpha$ だけでその表現をする．具体的な計算は，いずれにせよある基準系でそこの $x^\alpha$ に対してなされる．記号を簡単化するために以下では量 $x^\alpha$ それ自身を“4 元ベクトルの成分”でなしに一つのベクトル（または 4 元ベクトル）とみなす．

考えている慣性系 IS では，座標 $x$，$y$，$z$ は物理的な距離に等しく，座標点は座標面に対する空間的な点である．その距離は静止している測定器で測られる．そして座標 $t$ は，慣性系 IS に静止している時計が示す時刻である．

慣性系 IS では $x^\alpha$，慣性系 IS′ では $x'^\alpha$ であるような事象を考えることにする．これらの座標の間の関係は，ガリレイに従えば(3.1)，(3.2)で与えられ，アインシュタインに従えばローレンツ変換（LT）で与えられる．空間と時間は一様であるので，$x^\alpha$ と $x'^\alpha$ の間の変換はつねに**線形**

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta \, x^\beta + a^\alpha \tag{3.6}$$

となる．ここで，$a^\alpha$ は空間と時間の平行移動である．相対的な回転と運動は 4×4 行列 $\Lambda = (\Lambda^\alpha_\beta)$ で表される．空間と時間が一様であるということは，たとえば粒子速度の変換は，粒子が現在いる時空の点に依存しないことを意味する．このことは，(3.6)の係数 $\Lambda^\alpha_\beta$ が $x^\alpha$ に依存しないとき，すなわち変換が線形であれば厳密に保証される．

以下では(3.6)を，求めているローレンツ変換の試行形であると考える．われわれは線素の 2 乗

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta = c^2 dt^2 - d\boldsymbol{r}^2 \tag{3.7}$$

が変換(3.6)によって変化しないという条件で $\Lambda^\alpha_\beta$ を定める．このとき $\eta_{\alpha\beta}$ は

$$(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

によって定義される[4]．線素(3.7)をもつ 4 次元空間は**ミンコフスキー空間**と呼ばれる．

図 3.1 に示されている配置を参考にして，ガリレイ変換とローレンツ変換の違いを説明する．$y = y'$ と $z = z'$ はどちらの変換でも成り立つ．ただ $(x, t)$ と $(x', t')$ の間の変換だけが問題である．慣性系 IS$'$ において速さ $c = dx'/dt'$ で走る光の波面を考えよう．慣性系 IS における速さは，下記のようにガリレイ変換を使うかローレンツ変換を使うかに依存する．

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \xrightarrow[\text{ガリレイ変換}]{x' = x - vt,\; t' = t} \qquad \frac{dx}{dt} = c + v \tag{3.9}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \xrightarrow[\text{ローレンツ変換}]{c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2} \qquad \frac{dx}{dt} = c \tag{3.10}$$

マイケルソンの実験は，光速はいかなる慣性系でも $c$ に等しいことを示している．よってガリレイ変換は排除される．マイケルソンの実験は $ds^2$ の不変性を，特に $ds^2 = 0$ に対して証明した．また別の実験(たとえばある粒子に対する $ds^2$ の計測)では，$ds^2 \neq 0$ に対して $ds^2$ の不変性が確認されている．

## ローレンツ変換の変換行列

(3.6)の変換行列 $\Lambda^{\alpha}_{\ \beta}$ を定めよう．このために(3.6)を不変性の条件 $ds^2 = ds'^2$ に挿入する．すると

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\alpha}_{\ \gamma}\, \Lambda^{\beta}_{\ \delta}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta} = \eta_{\gamma\delta}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta} \tag{3.11}$$

---

[4] 訳注：

$$(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

という定義を用いる本もある．

を得る．これから

$$\Lambda_{\gamma}^{\alpha}\,\Lambda_{\delta}^{\beta}\,\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta} \qquad \text{あるいは} \qquad \Lambda^{T}\eta\Lambda = \eta \tag{3.12}$$

が得られる．これが(3.3)に対応するものであり，そこには同じように行列表示も与えられている．平行なずれ $a^{\alpha}$ は，微分

$$dx'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha}\,dx^{\beta} \tag{3.13}$$

によって取り除かれるので(3.11)では意味がない．一方，回転は特別な場合

$$x'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha}\,x^{\beta} \quad \text{ここで} \quad \Lambda_{k}^{i} = \alpha_{k}^{i}, \quad \Lambda_{0}^{0} = 1 \quad \text{そして} \quad \Lambda_{0}^{i} = \Lambda_{i}^{0} = 0 \tag{3.14}$$

として $\Lambda$ に含まれている．ここで，$\alpha_{k}^{i}$ は(3.1)に使われているものと同じである．ローレンツ変換全体はポアンカレ群と呼ばれている．それはガリレイ群と同じように 10 個のパラメターを含んでいる．平行なずれと回転は，ガリレイ群でもポアンカレ群でも部分群をなす．制限 $\det\alpha = 1$ と $\det\Lambda = 1$ によって，空間と時間の鏡像反転[5]は取り除かれる（この制限下でも線素は不変である）．

以下では，平行なずれと回転は考えないことにする．なぜならば，（7 個のパラメターをもつ）この部分群[6]に関するガリレイ変換とローレンツ変換は区別がつかなくなるからである．よって $a^{\alpha} = 0$ および $\alpha_{k}^{i} = \delta_{k}^{i}$ とおき，慣性系 IS と慣性系 IS′ の間の相対速度 $\boldsymbol{v}$（三つのパラメター）への依存性だけを考える．

$x^{2} = x'^{2}$ と $x^{3} = x'^{3}$ のために，図 3.1 のローレンツ変換に対して $\Lambda$ は

$$\Lambda = (\Lambda_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \Lambda_{0}^{0} & \Lambda_{1}^{0} & 0 & 0 \\ \Lambda_{0}^{1} & \Lambda_{1}^{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

---

[5] 訳注：(3.17)式下方の記述参照．
[6] 訳注：平行なずれと回転でできている群．

となる．(3.12)を $x^0$-$x^1$ 空間について書き出してみよう．すると

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^1_0 \\ \Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

となる．この式は四つの条件式を作り出すが，そのなかの二つは等しい．よって三つとなった条件式は

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 = 1, \qquad -(\Lambda^1_1)^2 + (\Lambda^0_1)^2 = -1, \qquad \Lambda^0_0\,\Lambda^0_1 - \Lambda^1_0\,\Lambda^1_1 = 0 \tag{3.17}$$

である．一般性を失うことなしに $\Lambda^1_0 = -\sinh\psi$，$\Lambda^0_1 = -\sinh\phi$ と置くことができる．ゆえに関係式 $\Lambda^0_0 = \pm\cosh\psi$，$\Lambda^1_1 = \pm\cosh\phi$ が出てくるが，鏡像反転を入れないことにして正符号を取る．(3.17)の最後の条件から $\phi = \psi$ となり，次の表式

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

を得る．慣性系 IS′ の原点に対して関係式

$$x'^1 = 0 = \Lambda^1_0\,c\,t + \Lambda^1_1\,v\,t \tag{3.19}$$

が成り立つ（図 3.1 を見よ）．これから

$$\tanh\psi = -\frac{\Lambda^1_0}{\Lambda^1_1} = \frac{v}{c} \tag{3.20}$$

が得られる．ローレンツ変換は(3.15)と(3.18)，(3.20)で定められる．行列要素は速さ $v$ の関数として

$$\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \Lambda^0_1 = \Lambda^1_0 = \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{3.21}$$

となる．よって考えているローレンツ変換は

$$\boxed{x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad c\,t' = \frac{c\,t - x\,v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \tag{3.22}$$

と書かれる．この変換は $v < c$ に対してだけ定義される．実際，相対的に $v < c$ で動いている慣性系だけが現実のものであり，このことは 4 節の運動方程式から出てくる． $v \ll c$ に対しては，(3.22) はガリレイ変換

$$x' = x - v\,t, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t \tag{3.23}$$

になる．任意の方向の速度に対する (3.21) の一般化は

$$\Lambda^0_{\ 0} = \gamma, \qquad \Lambda^0_{\ j} = \Lambda^j_{\ 0} = -\gamma\, v^j/c, \qquad \Lambda^i_{\ j} = \delta^i_j + (\gamma - 1)\,\frac{v^i\, v^j}{\boldsymbol{v}^2} \tag{3.24}$$

である．この場合（回転なし），行列 $\Lambda$ は対称であり，$\Lambda^{\mathrm{T}} = \Lambda$ である．逆変換は置き換え $\boldsymbol{v} \to -\boldsymbol{v}$ によって得られる．

## 加法則

(3.20) に定義されている量は

$$\boxed{\psi = \operatorname{arctanh}\frac{v}{c} \qquad \text{ラピディティ}} \tag{3.25}$$

**ラピディティ** (rapidity) と呼ばれている．ラピディティ $\psi$ と速さ $v$ の関係は図 3.2 に示してある．

ラピディティの有用さはいろいろあるが，中でも速さの和を取る際に顕著である．2 回の連続な，方向が同じローレンツ変換を考えよう．これは $\psi_1$ と $\psi_2$ をもつ二つの行列 (3.18) の積となり，それは再び同じ形の行列になる．この場合，ラピディティは足し合わされる．すなわち，新しいラピディティは

$$\boxed{\psi = \psi_1 + \psi_2 \qquad \text{平行な速度の和に対して}} \tag{3.26}$$

となる．双曲線正接の加法定理と (3.25) と (3.26) とから，速さに関して

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1\, v_2/c^2} \tag{3.27}$$

が成り立つ．慣性系 IS において，ある粒子の速さが $v$ であるとする．IS に対して $v_1$ で動いている慣性系 IS$'$ では，その粒子の速さが $v_2$ であるとすれば，

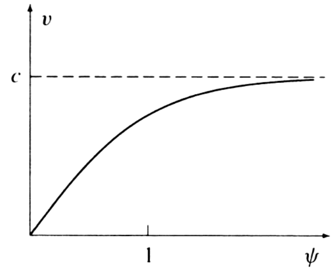



**図 3.2**: 速さ $v$ とラピディティ $\psi$ の関係．方向が同じで 2 度連続するローレンツ変換によって，ラピディティは(3.26)のような和になる．結果の速さ $v$ は（ $v_1 < c$ と $v_2 < c$ に対して）図のようにつねに $c$ より小さいことがわかる．

それらの速さの間の関係は(3.27)で表される．(3.27)は $v_2 < c$ の場合に限られていた．しかし IS′ で，$v_2 = c$ で動く光子に対しては，(3.27)は正確な結果 $v = c$ を与える．よって，極限の場合である $v_2 = c$ （そしてまた $v_1 = c$）が(3.27)で許されることがわかる．

速度が平行でない場合は，(3.24)で定義された行列 $\Lambda(\boldsymbol{v_1})$ と $\Lambda(\boldsymbol{v_2})$ を掛け合わせることによって加法則を得る．

(3.18)は角度 $\phi$ の回転に対する直交行列と比較される．線素(3.7)で第 2 項が負であるので，正弦関数，余弦関数の代わりに(3.18)で双曲線関数が現れることになる．同じ軸の周りの 2 度の回転は(3.26)のように和になる．そして考えている 2 度の，方向が同じローレンツ変換のようにそれらは順序を交換できる．一方，異なった軸の周りの回転，または異なった方向の速度をもつ二つのローレンツ変換は交換できない．すなわちこの場合，変換行列の積は可換ではない．

## 固有時

慣性系 IS の座標時 $t$ は，慣性系 IS に静止している時計が示す時間である．(慣性系 IS にあるいくつかの時計を合わせるのは簡単である．) 慣性系 IS 内を $\boldsymbol{v}(t)$ で動いている時計の表示 $\tau$ を求めたい．ある特定の瞬間 $t$ に，慣性系 IS に対して一定の速度 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(t)$ で動いている慣性系 IS′ を考えよう．つ

づく短い（結局のところ無限小の）時間間隔では，時計は $\boldsymbol{v}' \approx 0$ で慣性系 IS′ 内を動く．よってそれは慣性系 IS′ に静止している時計と同じ時間

$$d\tau = dt' = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}\, dt = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}\, dt \tag{3.28}$$

を示す．すぐ次の短い時間間隔では，同じ考えが $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(t + dt)$ をもつ慣性系 IS″ に適用できる．このようにして時間間隔 $d\tau$ についての和は，動いている時計の**固有時**

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} \qquad \text{速度 } \boldsymbol{v}(\mathrm{t}) \text{ で動いている時計の表示} \tag{3.29}$$

を与える．任意の二つの事象 1 と 2 に対して，慣性系 IS に静止しているすべての時計は同じ時間差 $t_2 - t_1$ を示す．一方，$\boldsymbol{v}(t)$ で運動している時計は，この二つの事象の起こる間隔をより短い時間 $\tau$ で示す．よって，運動している時計の時間はゆっくり進む．この効果はまた，**時間の遅れ**（または相対論的時間遅れ）と呼ばれる．

前記の 1 と 2 の事象は，慣性系 IS に静止しているストップウォッチの入りと切りであるとしてよい．結果のストップウォッチの表示は明らかに，どの系の観測者から見ても同じである．どの観測者も自分の慣性系で，考えている時計の時刻 $\tau$ を(3.29)に従って計算できる．ただこのとき，$t_1$ と $t_2$，$v(t)$ は選ばれた（すなわち観測者の）慣性系に依存するが，結果の $\tau$ はどの慣性系を選んだかには無関係である．この結果は次の事実からくる．すなわち，係数を除いて $d\tau$ は

$$d\tau^2 = (ds^2/c^2)_{\mathrm{clock}} = (dt^2 - d\boldsymbol{r}^2/c^2)_{\mathrm{clock}} \tag{3.30}$$

のように不変な線素 $ds$ に比例している．

# 4 相対論的力学

質点に対するニュートンの運動方程式を相対論的に一般化し，かつ，質量とエネルギーの等価性を議論する．詳細な取扱いについては著者の教科書 *Mechanik*[文献 7] の 38 節と 39 節とを参照のこと[7]．

## 運動方程式

まず，ニュートンの運動方程式は極限 $v \ll c$ の場合に対応しているということから始める．ある慣性系 IS′ を考えよう．その系では，特定の時刻 $t$ に粒子は瞬間的に静止するものとする[8]．それゆえニュートンの法則

$$m\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt'} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} \qquad \text{慣性系 IS}' \tag{4.1}$$

は，この慣性系 IS′ で相対論的に正確であるべきである．質量 $m$ と力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ の定義はニュートン力学に従う[9]．しかし，この定義は今の瞬間的な静止系 IS′ に依っている．このように定義された**静止質量** $m$ はローレンツ・スカラーである．

ローレンツ変換を使えば，相対論的に正しい方程式(4.1)から同じ内容の式を別の慣性系 IS で得る．よって，これが探していた相対論的運動方程式である．実際にはわれわれは別のやり方をする．すなわち，慣性系 IS′ で(4.1)になるような，以下で述べるローレンツ・ベクトル方程式を立てる．これが非相対論的極限から特殊相対性理論を導出するための一般的な手法である．われわれは一般相対性理論を導き出すときにも同じような思考方法を用いる．

速度 $v^i = dx^i/dt$ を相対論的に一般化したものは **4 元速度**

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \tag{4.2}$$

---

7) 訳注：前にも述べたように，ここでの説明が適切であるので，必ずしも [文献 7] を参照する必要はない．

8) 訳注：共動座標系ともいう．この系は速度空間で速度ベクトルの接平面となる．

9) ある未知の力が二つの物体に引き起こす加速度を計ると比 $m_1/m_2$ がわかる．ある特定の質量は，任意に単位質量として定義される．このようにして質量の尺度が決められる．力は(4.1)に従って加速度の計測から定められる．

である． $d\tau = ds/c$ は不変であるから，$u^\alpha$ は(3.13)の $dx^\alpha$ のように変換される．すなわち

$$u'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta u^\beta \tag{4.3}$$

が成り立つ．このように変換される量はすべて**4元ベクトル**，または**ローレンツ・ベクトル**である．(4.2)によって，$du^\alpha$ と次の式

$$\boxed{m\,\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \qquad \text{相対論的運動方程式}} \tag{4.4}$$

の左辺はまたローレンツ・ベクトルである($d\tau$ と $m$ はローレンツ・スカラーである)．右辺にこれから定めるローレンツ・ベクトル $F^\alpha$ を導入した．(4.4)に対して次のことが成り立っている．

1. 方程式はローレンツ・ベクトル方程式である．ローレンツ変換によって，それは $m\,du'^\alpha/d\tau = F'^\alpha$ となる．したがって，ローレンツ変換のもとでこの方程式は共変(形式不変)である．
2. $F^\alpha$ が適切に選ばれることを前提とすれば，$v \ll c$ に対して方程式はニュートンのよく知られた極限に帰着する．

項目 2 により(4.4)はある特定の慣性系，すなわち瞬間的に（物体と）ともに動いている慣性系 IS′ で成り立つ．この主張は正しいから，ローレンツ変換によって別の慣性系 IS に移っても(4.4)は成り立つ．しかしながら，項目 1 によってローレンツ変換は方程式の形を変えない．よって(4.4)はどんな慣性系 IS でも成り立つ．すなわち，(4.4)は正確な相対論的方程式である．

極限 $v \ll c$ の場合，(4.4)の左辺は $(0, m\,d\boldsymbol{v}'/dt')$ となる．よって(4.1)とつじつまが合うためには，慣性系 IS′ におけるミンコフスキー力 $F'^\alpha$ は

$$(F'^\alpha) = (F'^0, \boldsymbol{F}') = (0, \boldsymbol{F}_\mathrm{N}) \tag{4.5}$$

とならなければならない．これから $-\boldsymbol{v}$ をもつローレンツ変換によって粒子が速度 $\boldsymbol{v}$ をもつ系での力

$$F^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta(-\boldsymbol{v})\,F'^\beta \qquad (\text{ミンコフスキー力}) \tag{4.6}$$

を得る．(3.21) を使い，$\boldsymbol{v} = v^1 \boldsymbol{e}_1$ に対してこれを計算してみよう．すると

$$F^0 = \gamma \frac{v^1 F_{\mathrm{N}}^1}{c}, \quad F^1 = \gamma F_{\mathrm{N}}^1, \quad F^2 = F_{\mathrm{N}}^2, \quad F^3 = F_{\mathrm{N}}^3 \tag{4.7}$$

を得る．ニュートン力は $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}\parallel} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}\perp}$ のように $\boldsymbol{v}$ に平行な部分と垂直な部分とに分解できる．(4.7) によれば平行成分には係数 $\gamma$ がつくが垂直成分にはそれがつかない．このことを考慮すると，$\boldsymbol{v}$ の任意の方向への一般化は次のようになる．

$$F^0 = \gamma \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}}{c}, \quad \boldsymbol{F} = \gamma\, \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}\parallel} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}\perp} \tag{4.8}$$

## エネルギー運動量関係式

**4 元運動量** $p^\alpha = m\, u^\alpha$ はまたローレンツ・ベクトルである．(3.28) の助けを借りて速度 $v^i$ で $p^\alpha = m\, dx^\alpha / d\tau$ を表すと

$$(p^\alpha) = \left( \frac{m\, c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{m\, v^i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \left( \frac{E}{c},\ \boldsymbol{p} \right) \tag{4.9}$$

となる．ここで，次の相対論的エネルギー $E$ と相対論的運動量 $\boldsymbol{p}$ とを導入した．

$$\boxed{E = \frac{m\, c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{m\, \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \tag{4.10}$$

非相対論的極限では，$\boldsymbol{p}$ はニュートンの運動量 $\boldsymbol{p} \approx \boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} = m\, \boldsymbol{v}$ となる．(4.8) により，(4.4) の第ゼロ成分は

$$\frac{dE}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} \tag{4.11}$$

となる．$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ は粒子にされる仕事であるから，この式は $E = \gamma m\, c^2$ を**エネルギー**と呼ぶことを正当化するものである．

$ds^2 = c^2 d\,\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ から $\eta_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta = m^2\, c^2$ がでる．これによって

$$\boxed{E^2 = m^2 c^4 + c^2 \boldsymbol{p}^2 \qquad \text{エネルギー運動量関係式}} \tag{4.12}$$

を得る．このエネルギー運動量関係式は

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\boldsymbol{p}^2} \approx \begin{cases} mc^2 + p^2/2m & (p \ll mc) \\ cp & (p \gg mc) \end{cases} \tag{4.13}$$

という極限値をもっている．ここで $p = |\boldsymbol{p}|$ である．静止質量ゼロの粒子(光子，ニュートリノ[10])に対して $E = cp$ が正確に成り立つ．

## 質量とエネルギーの等価性

エネルギー $E$ は，静止エネルギー

$$E_0 = mc^2 \qquad (\text{静止エネルギー}) \tag{4.14}$$

と運動エネルギー $E_{\text{kin}} = E - E_0 = E - mc^2$ に分けることができる．運動エネルギーは，止まっている粒子を速さ $v$ にするのに必要なエネルギーである．

複数の粒子が関係した過程では，全エネルギーと全運動量は保存される．これは(4.10)に定義されている量に関して成り立ち，したがってそれらの量がエネルギーおよび運動量と呼ばれるのは当を得ている．これに対して，静止エネルギー（または静止質量）と運動エネルギーそれら自身は保存されない．むしろそれらは互いに転換される．この場合，エネルギー（たとえば，運動エネルギーまたはポテンシャル・エネルギー）のどんな変化 $\Delta E$ も静止質量 $\Delta m$ の変化に対応する．すなわち

$$\Delta E = \Delta m c^2 \tag{4.15}$$

この事情は**質量とエネルギーの等価性**と呼ばれている．

重力理論では質量または質量密度が場の源として現れるので，われわれはそれに対して特別な注意を払うことにする．以下では，質量という言葉はいつも静止質量を表す．質量とエネルギーが等価であるということは，いろいろな形のエネルギーが結合系（たとえば星）の質量に寄与しているということを示唆している．このことをいくつかの例を挙げて説明しよう．

[10]訳注：ごく最近では，ニュートリノには質量があると言われている．

- 原子核：二つの重水素（質量 $m_\mathrm{d}$）の原子核が融合してヘリウム（$m_\mathrm{He}$）になるとき，エネルギー $(2m_\mathrm{d} - m_\mathrm{He})c^2$ が解放される．これはヘリウムの結合エネルギーが負であるので，質量 $m_\mathrm{He}$ が $2m_\mathrm{d}$ に比べて減少したためである．逆に，ウラニウム核の静止質量は核分裂生成物の質量の総和より大きいから核分裂が可能である．どの場合も原子核の質量はそれを形成している核子の質量と運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの寄与から成り立っている．
- 星：星は重力で保たれている．星の質量は成分の質量の和より重力結合エネルギーの分だけ少なくなっている．
- たくさんの粒子が入っている箱：静止していて壁の質量が $M_\mathrm{wall}$ である箱を考える．箱のなかには質量 $m_i$，速度 $v_i$ の粒子が入っている．加えてエネルギー $\hbar\omega_j$ の光子があるものとする．箱の静止質量 $M$ はそのとき

$$M = M_\mathrm{wall} + \sum_i \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + \sum_j \frac{\hbar\omega_j}{c^2} + \frac{E_\mathrm{pot}}{c^2} + \cdots \tag{4.16}$$

  となる．すなわち，そこに含まれているすべてのエネルギーは箱の質量に寄与する．たとえば，箱に閉じこめられている電磁波，または粒子の間の相互作用のエネルギー $E_\mathrm{pot}$ は箱の質量に含まれる．

相対論的運動方程式(4.4)とその結果は，特に $v \approx c$ をもつ粒子に対して加速器で精力的に調べられ，その正当性が保証されている．

## 演習

4.1: 宇宙船が（宇宙船から測って）5 年間地球から加速されつづけ，その加速によって宇宙飛行士は地球上と同じ体重 $Mg$ を感じつづけたものとする（$M$: 宇宙飛行士の質量, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$）．そのすぐ後，$-g$ の加速を 5 年間（宇宙船時間）つづけて静止状態になった．その後，時間反転の運動で地球に帰還した．地球上に残っていた宇宙飛行士の双子の兄弟

はその帰還のときにどれだけ年老いていたか．宇宙船は地球からどれだけ離れたか．

# 5 ミンコフスキー空間のテンソル

質点に対する相対論的運動方程式(4.4)はローレンツ・ベクトル方程式である．すべての基本的物理法則は，これと同様にローレンツ・テンソル方程式として定式化される．よって，これらの方程式はすべての慣性系で同じ形を取り，(アインシュタインの) 相対性原理を満足する．

この節ではローレンツ・テンソルが形式的に定義されるが，それらは添字の付いた量として座標のように成分ごとに変換される．

われわれはすでに

$$V^\alpha \quad \Longrightarrow \quad V'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta\, V^\beta \tag{5.1}$$

のように変換されるすべての量に対して，**4 元ベクトル**という名称を導入した．これと同義語であるが，われわれは 4-ベクトル，およびローレンツ・ベクトルという言い方も使う．これらの（上に添字をもつ）**反変成分**のほかに，(下に添字をもつ) **共変成分**

$$V_\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta}\, V^\beta \tag{5.2}$$

を定義する．これは今後，簡潔に共変ベクトルと呼ぶ．この式で $\eta_{\alpha\beta}$ は(3.8)で与えられる．繰り返すが，**共変**という言葉はよく使う**形式不変**の意味も持つ．

$(\eta_{\alpha\beta})$の逆行列として行列$(\eta^{\alpha\beta})$

$$\eta^{\alpha\beta}\,\eta_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma = \begin{cases} 1 & (\alpha = \gamma) \\ 0 & (\alpha \neq \gamma) \end{cases} \tag{5.3}$$

を定義すると

$$(\eta_{\alpha\beta}) = (\eta^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

が成り立つ．$\eta_{\alpha\beta}$ と $\eta^{\alpha\beta}$ は定数 (±1) を使って定義されている．

(5.3) の助けを借りて，(5.2) を反変成分

$$V^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta} V_{\beta} \tag{5.5}$$

で書くことができる．よって共変ベクトルは

$$V'_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} V'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\gamma} V^{\gamma} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\gamma} \eta^{\gamma\delta} V_{\delta} = \bar{\Lambda}^{\delta}_{\alpha} V_{\delta} \tag{5.6}$$

に従って変換される．ここで要素

$$\bar{\Lambda}^{\delta}_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{\gamma} \eta^{\gamma\delta} \tag{5.7}$$

をもつ行列 $\bar{\Lambda}$ を導入した．(5.2) や (5.5) との類似で，$\bar{\Lambda}^{\beta}_{\alpha}$ の代わりに $\Lambda_{\alpha}{}^{\beta}$ を，そして $\Lambda^{\alpha}_{\beta}$ の代わりに $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ を導入してもよい [文献 1]．方程式 (5.7) で，上と下の添字の交換がベクトル (5.2) に類似して起こるので，この点ではこれらの表現は考慮に価する．しかしわれわれは，この表示は使わない．というのは，$\Lambda$ と $\bar{\Lambda}$ は（下に定義される意味での）テンソルではないからである．

$\bar{\Lambda}$ が $\Lambda$ の逆変換であることは，次のようにして容易に示すことができる．

$$\bar{\Lambda}^{\gamma}_{\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} = \eta_{\alpha\delta} \eta^{\gamma\epsilon} \Lambda^{\delta}_{\epsilon} \Lambda^{\alpha}_{\beta} \overset{(3.12)}{=} \eta^{\gamma\epsilon} \eta_{\epsilon\beta} = \delta^{\gamma}_{\beta} \tag{5.8}$$

これと同様に

$$\Lambda^{\beta}_{\alpha} \bar{\Lambda}^{\alpha}_{\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma} \tag{5.9}$$

が成り立つ．われわれは $V'^{\alpha}$ を使って，次のように $V^{\gamma}$ を表すこともできる．

$$V^{\gamma} = \bar{\Lambda}^{\gamma}_{\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\beta} V^{\beta} = \bar{\Lambda}^{\gamma}_{\alpha} V'^{\alpha} \tag{5.10}$$

このことは，$\bar{\Lambda}$ が $V'^{\alpha}$ から $V^{\gamma}$ への逆変換を生みだすことを示している．

以上は次のようにまとめられる．すなわち，反変ベクトルは $\Lambda$ で，共変ベクトルは $\bar{\Lambda}$ を使って変換される．反変ベクトルに $\bar{\Lambda}$ を，共変ベクトルに $\Lambda$ を使えば逆変換を生みだす．

二つのベクトルの**スカラー積**

$$V_{\alpha} U^{\alpha} = V^{\alpha} U_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta} V_{\alpha} U_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} V^{\alpha} U^{\beta} \tag{5.11}$$

は，ローレンツ変換のもとでは不変であることが次のようにして示せる．

$$V'^{\alpha}\,U'_{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta}\,\bar{\Lambda}^{\delta}_{\alpha}\,V^{\beta}\,U_{\delta} = V^{\beta}\,U_{\beta} \tag{5.12}$$

逆に $V^{\alpha}\,U_{\alpha}$ の不変性と二つの量のうちの一つがベクトルであるということから，もう一つが同様にベクトルであることが以下のようにして導き出される．$V^{\alpha}\,U_{\alpha}$ は 4 元スカラーであり， $V^{\alpha}$ は 4 元ベクトルであるとしよう．これから関係式

$$V'^{\alpha}\,U'_{\alpha} = V^{\beta}\,U_{\beta} = \bar{\Lambda}^{\beta}_{\alpha}\,V'^{\alpha}\,U_{\beta} \tag{5.13}$$

が出てくる．$V'^{\alpha}$ の係数を比較すれば

$$U'_{\alpha} = \bar{\Lambda}^{\beta}_{\alpha}\,U_{\beta} \tag{5.14}$$

がわかる．よって，$U_{\alpha}$ は 4 元ベクトルである．

$r$ 個の添字をもつ量を考えよう．その量が成分ごとに座標 $x^{\alpha}$ のように変換するとき，その量は $r$-**階のテンソル**である．

$$T'^{\alpha_1\cdots\alpha_r} = \Lambda^{\alpha_1}_{\beta_1}\cdots\Lambda^{\alpha_r}_{\beta_r}\;T^{\beta_1\ldots\beta_r} \tag{5.15}$$

この記述は，ローレンツ変換のもとでの振舞いを示している．よって，このように定義されたテンソルはローレンツ・テンソル（あるいは 4 元テンソル），または**ミンコフスキー空間のテンソル**と呼ばれる．これは決まった方式で直交変換される 3 次元ユークリッド空間のテンソル，たとえば通常の剛体の慣性テンソルとは区別しなければならない．

ゼロ階のテンソルはスカラーであり，1 階のテンソルはベクトルである．これらに対する定義（すなわち，変換条件）はすでに示した．さらに具体例として，混合成分をもつ 3 階のテンソルに対する変換を与える．

$$T'^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{\delta}\,\bar{\Lambda}^{\epsilon}_{\beta}\,\bar{\Lambda}^{\nu}_{\gamma}\;T^{\delta}{}_{\epsilon\nu} \tag{5.16}$$

次の操作に応じて対応する階数のテンソルが生じることは容易に示される．

1. 同種のテンソルの線形結合（たとえば， $3\,U^{\alpha\beta} + V^{\alpha\beta}$），
2. テンソルの積（$T^{\alpha\beta}\,V^{\gamma}$），

3. テンソルの縮約($T^{\alpha\beta}{}_{\beta}$, $T^{\alpha\beta}V_{\beta}$),

4. テンソル場の微分($\partial_{\alpha}T^{\alpha\beta}$)[11].

テンソルの共変成分,反変成分間の移り変わりは(5.2)および(5.5)のように定義される.この場合,一般に上付きと下付きの添字の並び方が大事であり,それらを上下入れ替えて書いてはいけない.ここで,$\Lambda^{\alpha}_{\beta}$ はテンソルではないということに関して一言述べる.テンソルについては一般に,その成分は慣性系 IS においても別の慣性系 IS′ においてもきちんと定義されていなければならない.しかし $\Lambda$ に対してはそうではなく,二つの慣性系に関して一つの $\Lambda$ が存在するのである.

(5.4)で $\eta = (\eta_{\alpha\beta}) = (\eta^{\alpha\beta})$ を定数要素行列として導入した.実際には,$\eta$ をテンソルとして理解し,テンソルとして変換できることが次のようにして示される.

$$\eta'_{\alpha\beta} = \bar{\Lambda}^{\gamma}_{\alpha}\,\bar{\Lambda}^{\delta}_{\beta}\,\eta_{\gamma\delta} \overset{(3.12)}{=} \bar{\Lambda}^{\gamma}_{\alpha}\,\bar{\Lambda}^{\delta}_{\beta}\,\Lambda^{\mu}_{\gamma}\,\Lambda^{\nu}_{\delta}\,\eta_{\mu\nu} \overset{(5.9)}{=} \eta_{\alpha\beta} \tag{5.17}$$

テンソル $\eta$ はミンコフスキー・テンソルと呼ばれる.$\eta$ は線素(3.7)に現れたのであるから,それはここで考えているミンコフスキー空間の計量(9 節)である.特に

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} = \eta^{\alpha\gamma}\,\eta_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} = \eta_{\beta}{}^{\alpha} \tag{5.18}$$

が成り立つ.よって,クロネッカー(Kronecker)の記号 $\delta^{\alpha}_{\beta}$ もまたテンソルである.対称性から,この特別な場合は上下の符号の書き方を変えることができる($\eta^{\alpha}{}_{\beta} = \eta_{\beta}{}^{\alpha} = \eta^{\alpha}_{\beta}$).

ミンコフスキー空間でテンソルと見なされるもう一つの量は,次の完全反対称テンソルである.

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & (\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta) = (0,1,2,3)\ \text{の偶置換} \\ -1 & (\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta) = (0,1,2,3)\ \text{の奇置換} \\ \ \ 0 & \text{それら以外} \end{cases} \tag{5.19}$$

$\det \Lambda = 1$ を考慮すると,**レビ-チビタ**(Levi-Cività)**記号** $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ は上に定義された意味でテンソルであることが容易に示される.すなわち[12]

[11] 訳注:$\partial_{\alpha}$ については(5.25)を見よ.

[12] 訳注:演習問題(5.2)を見よ.

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{5.20}$$

共変成分の定義は

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \eta_{\alpha\alpha'}\,\eta_{\beta\beta'}\eta_{\gamma\gamma'}\,\eta_{\delta\delta'}\,\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{5.21}$$

である．

## テンソル場

最初に，$\partial/\partial x^\alpha$ が共変ベクトルとして変換されることを示す．まず関係式

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{5.22}$$

が成り立つ．さらに(5.10)から

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \bar{\Lambda}_\alpha^\beta \tag{5.23}$$

が出る．このようにして

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \bar{\Lambda}_\alpha^\beta\,\frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{5.24}$$

が得られる．偏微分に対して簡略化した記号

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \text{および} \quad \partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{5.25}$$

を使う．(5.24)に従えば $\partial_\alpha$ は共変ベクトルであり， $\partial^\alpha$ は反変ベクトルである．ダランベール演算子

$$\Box \equiv \partial^\alpha\,\partial_\alpha = \eta^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{5.26}$$

はローレンツ・スカラーである．

偏微分 $\partial_\alpha$ は時空座標 $x = (x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$ の関数に作用する．このような関数は**場**と呼ばれる．今，ローレンツ・テンソルであるような場を考える．関数 $S(x)$ と $V^\alpha(x)$，$T^{\alpha\beta}(x)$ は，次の場合それぞれスカラー場，ベクトル場，テンソル場である．

$$S'(x') = S(x), \qquad V'^\alpha(x') = \Lambda_\beta^\alpha\,V^\beta(x), \qquad T'^{\alpha\beta}(x') = \Lambda_\gamma^\alpha\,\Lambda_\delta^\beta\,T^{\gamma\delta}(x) \tag{5.27}$$

ここで引数は同時に変換されなければならない．すなわち，$x'$ は $(x'^{\alpha}) = (\Lambda^{\alpha}_{\beta}\, x^{\beta})$ である．

## 演習

5.1: $V^{\alpha} = T^{\alpha\beta}\, W_{\beta}$ はどんな慣性系でも成り立つものとする．$V^{\alpha}$ と $W^{\alpha}$ はローレンツ・ベクトルであるとしよう．すると $T^{\alpha\beta}$ はローレンツ・テンソルであることを証明せよ．

5.2: レビ－チビタ・テンソルは 4 階の擬テンソルであり，したがって

$$\epsilon'^{\,\alpha\beta\gamma\delta} = (\det\Lambda)\, \Lambda^{\alpha}_{\alpha'}\, \Lambda^{\beta}_{\beta'}\, \Lambda^{\gamma}_{\gamma'}\, \Lambda^{\delta}_{\delta'}\, \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$$

は $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ に等しいことを示せ．

5.3: $\partial_{\alpha}\, j^{\alpha} = 0$ がローレンツ・ベクトル $j^{\alpha}$ に対して成り立つとせよ．このとき，量 $q = \int d^3r\, j^0/c$ がローレンツ・スカラーであることを示せ．まず $q$ が次のように書けることを確認せよ．

$$q = \frac{1}{c} \int_{x^0=\text{const.}} da_{\alpha}\, j^{\alpha} \tag{5.28}$$

このとき

$$da_{\alpha} = \frac{1}{6}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, da^{\beta\gamma\delta} \tag{5.29}$$

はローレンツ・ベクトルであり，$da^{\beta\gamma\delta}$ は反対称テンソルであり，それは次の置換

$$da^{012} = dx^0\, dx^1\, dx^2,\; da^{102} = -dx^1\, dx^0\, dx^2 \quad \text{など}$$

で決められる．よって $da^{\beta\gamma\delta}$ は 4 次元ミンコフスキー空間で 3 次元の‘表面要素’を形成する．

# 6 電気力学

第2節で述べたように，考えている重力理論は形式的に電気力学に類似している．しかし，また当然基本的な違いがある．後々の議論に役立つように，ここで電気力学の基本方程式とエネルギー運動量テンソルを与える．

光速が慣性系に依存しないということ（3節）は，マクスウェルの場の方程式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\varrho_{\mathrm{e}}\,, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{6.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{6.2}$$

がすべての慣性系で成り立つという言い方に一般化される．電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ の源は電荷密度 $\varrho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},t)$ と電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ である．われわれはガウス単位系を使うが，そこでは $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ とは同じ次元である．

式(6.1)から導出される連続の式 $\operatorname{div}\boldsymbol{j} + \partial_t\,\varrho_{\mathrm{e}} = 0$ は

$$\partial_\alpha\, j^\alpha = 0 \tag{6.3}$$

となり，そして

$$(\,j^\alpha\,) = (\,c\varrho_{\mathrm{e}},\, j^i\,) \tag{6.4}$$

である．方程式(6.3)は電荷の保存則を言い表したものである．これから孤立系に対して $\partial_t \int d^3r\, j^0 = 0$ が出てくる．また(6.1)，(6.2)により(6.3)はどんな慣性系でも成り立つ．よって，$\partial_\alpha\, j^\alpha$ はローレンツ・スカラーである．$\partial_\alpha$ は共変ベクトルであるから，$j^\alpha$ は反変4元ベクトルでなければならない．

$j^\alpha$ がローレンツ・ベクトルであるので，電荷 $q = \int d^3r\, j^0$ はローレンツ・スカラーである（演習5.3）．電荷 $q$ が慣性系に依存しないということ，または任意の慣性系において電荷がその速度に依存しないということは，原子が電気的に中性であるという事実によって高い精度で正しいことがわかる．

ここで次の反対称行列を導入する．

$$(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

すると非同次のマクスウェル方程式(6.1)が次の式

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta} \tag{6.6}$$

に等しいことは簡単に示すことができる．$j^\alpha$ は 4 元ベクトルであり，かつマクスウェル方程式はどの慣性系でも成り立つのであるから，$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}$ は 4 元ベクトルであるはずである．このことから，$F^{\alpha\beta}$ がテンソルであることがわかる．このテンソルを**電磁場テンソル**と呼ぶ．テンソルとしての $F$ の特性が電場と磁場の変換のされ方を決める．同次マクスウェル方程式(6.2)は

$$\boxed{\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0} \tag{6.7}$$

となる．(6.6)，(6.7)のように書き換えれば，マクスウェル方程式がローレンツ変換に対して形式不変であることは明らかである．

同次マクスウェル方程式(6.7)を解くには，$F^{\alpha\beta}$ を

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \tag{6.8}$$

とすれば必要かつ十分である．非同次マクスウェル方程式は，4 元ポテンシャル $(A^\alpha) = (\Phi, A^i)$ に対して以下のようにもう一つの形に定式化される．(6.8)から**ゲージ変換**

$$A^\alpha \Longrightarrow A^\alpha + \partial^\alpha \chi \tag{6.9}$$

は場 $F^{\alpha\beta}$ を変えないということが出てくる．これは任意のスカラー場 $\chi(x)$ に対して成り立つ．この自由度のために，ポテンシャル $A^\alpha$ に対してスカラー的な条件を課すことができる．その条件としてローレンツ条件

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \tag{6.10}$$

を選ぶと，非同次マクスウェル方程式(6.6)は次のように成分ごとに分離して書ける．

$$\Box A^{\alpha}=\frac{4\pi}{c}\,j^{\alpha} \tag{6.11}$$

よって，われわれはマクスウェル方程式に関して3種類の表式を手にしたことになる．すなわち，それらは(6.1)と(6.2)の組，そして(6.6)と(6.7)の組，さらに(6.10)と(6.11)の組である．最初の組は特定の応用に都合がよい．これに対して他の2組はローレンツ変換に対して共変であることは自明である．2番目の組はそれが物理的な場に結びついているという長所がある．そして3番目の組は解くのが容易であるという特徴がある．

電磁場の方程式のほかに，さらに電荷 $q$ をもつ粒子の運動方程式がある．ベクトル方程式

$$\boxed{m\frac{du^{\alpha}}{d\tau}=\frac{q}{c}F^{\alpha\beta}u_{\beta}} \tag{6.12}$$

の $i$-成分（空間成分）は

$$\frac{d}{dt}\,\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{6.13}$$

のように書かれる．右側はよく知られたローレンツ力である．左側は相対論的な運動量 $\boldsymbol{p}=\gamma m\boldsymbol{v}$ の時間変化である．瞬間的な静止系 IS′ では，(6.13)は(4.1)

$$m\,\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt'}=q\,\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{F}_{\rm N}\qquad(\text{慣性系 IS}'\text{ において}) \tag{6.14}$$

になる．(6.14)から(6.12)への一般化は，(4.1)から(4.4)への道筋と完全な類似が成り立つ．

電磁場のエネルギー運動量テンソル

$$T^{\alpha\beta}_{\rm em}=\frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha}{}_{\gamma}\,F^{\gamma\beta}+\frac{1}{4}\,\eta^{\alpha\beta}\,F_{\gamma\delta}\,F^{\gamma\delta}\right) \tag{6.15}$$

を導入しよう．00-成分は場のエネルギー密度 $u_{\rm em}$

$$u_{\rm em}=T^{00}_{\rm em}=\frac{1}{8\pi}\,\left(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2\right) \tag{6.16}$$

である．$0i$-成分はエネルギー密度束 $\boldsymbol{S}$（またはポインティング・ベクトル）

$$\boldsymbol{S} = c \sum_i T_{\mathrm{em}}^{0i}\, \boldsymbol{e}_i = \frac{c}{4\pi}\, \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{6.17}$$

を与える．次に $T_{\mathrm{em}}^{\alpha\beta}$ の発散を取る．そこにマクスウェル方程式を使うと

$$\partial_\alpha\, T_{\mathrm{em}}^{\alpha\beta} = -\,\frac{1}{c}\, F^{\beta\gamma}\, j_\gamma \tag{6.18}$$

を得る．電荷ゼロの空間$(j_\alpha = 0)$では，エネルギー運動量密度に対して連続の方程式 $\partial_\alpha\, T_{\mathrm{em}}^{\alpha\beta} = 0$ が成り立つ．(6.3)の電荷保存則の場合と同じように，これから孤立系に対する場の4元運動量の保存則（$P_{\mathrm{em}}^{\beta} = \int d^3r\, T_{\mathrm{em}}^{0\beta}$ =const.）が出てくる．

式(6.18)の右辺の空間成分を3元ベクトルにまとめ上げて，それを電磁場 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$，場の源 $\varrho$，$\boldsymbol{j}$，で表すと

$$\frac{1}{c}\, F^{i\gamma}\, j_\gamma \boldsymbol{e}_i = \varrho\, \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{f} \tag{6.19}$$

となる．ローレンツ力（(6.13)の右辺）と比較すると，$\boldsymbol{f}$ がローレンツ応力**密度**であることがわかる．これを使うと，式(6.18)を

$$\partial_\beta\, T_{\mathrm{em}}^{\alpha\beta} = -f^\alpha \tag{6.20}$$

のように，電磁場のミンコフスキー応力密度 $f^\alpha$ でもって書き表すことができる．これが応力密度であって流体要素に働く．この応力密度を仲介に，エネルギーおよび運動量は，場と電荷および電流との間でやりとりされる．

## 演習

6.1: 電磁場中における荷電粒子の運動方程式の共変形は $m\, du^\alpha/d\tau = (q/c)\, F^{\alpha\beta}\, u_\beta$ である．これから3元ベクトル形

$$\frac{d}{dt}\, \frac{m\, \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right)$$

を導け．

6.2: 源項のないマクスウェル方程式 $\Box A^\alpha = 0$ は平面波の形の解

$$A^\alpha(x) = e^\alpha \exp(\mathrm{i}\, k^\beta\, x_\beta) \tag{6.21}$$

をもっている．$(k^\alpha) = (\omega/c,\, k^i)$ が 4 元ベクトルであることを説明せよ．この特性から光波に対する**ドップラー効果**を導き出せ．このドップラー効果は，発信者と受信者の間の相対運動（速度 $\boldsymbol{v}$）に基づく振動数の変化である． $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{k}$ および $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{k}$ に対してこの効果は $v/c$ のどのオーダーであるか．

6.3: ラグランジュ関数 $\mathscr{L}_0(u^\alpha) = -mc\sqrt{u^\alpha\, u_\alpha}$ は自由粒子の相対論的運動を記述する．外場 $A^\beta(x)$ のなかにある粒子に対してもっとも簡単なローレンツ不変項を加えたラグランジュ関数

$$\mathscr{L} = -mc\,\sqrt{u^\alpha\, u_\alpha} - \frac{q}{c}\, A^\beta\, u_\beta \tag{6.22}$$

を考える．ハミルトンの原理 $\delta \int d\tau\, \mathscr{L} = 0$ を使って運動方程式 $m\, du^\alpha/d\tau = (q/c)\, F^{\alpha\beta}\, u_\beta$ を導出せよ．

# 7 相対論的流体力学

完全流体の運動は，オイラー方程式と連続の方程式によって定められる．われわれは，これらの方程式の相対論的一般化を行う．この一般化は，結果として流体のエネルギー運動量テンソルの導入につながる．非相対論的重力理論においては質量密度が場の源である．相対論的一般化では，(2.5)，(2.6)のように質量密度はエネルギー運動量テンソルで置き換えられる．

以下の考察では**完全流体**を考える．その際，質量密度 $\varrho(\boldsymbol{r},\, t)$，速度場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\, t) = v^i\, \boldsymbol{e}_i$，等方的圧力 $P(\boldsymbol{r},\, t)$ とで記述されるような一つの物理系を取り上げる．さらに流体の粘性（内部摩擦）は考慮しない．結果の方程式は流体に適用できるだけでなく，気体や煙，塵（ダスト）にも適用できる．

流体の質量要素 $\Delta m$ に対するニュートン運動方程式は $\Delta m\, d\boldsymbol{v}/dt = \Delta \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ である．われわれは質量密度 $\varrho = \Delta m/\Delta V$，ニュートンの応力密度 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}} = \Delta \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}/\Delta V$ を導入する．ここで，$\Delta V$ は関連している体積要素である．応力密度 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{N}} = -\nabla P + \boldsymbol{f}_0$ は，このように，圧力勾配 $-\nabla P(\boldsymbol{r},\, t)$ の寄与とその他の外力 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{r},\, t)$（たとえば重力 $\boldsymbol{f}_0 = \varrho\, \boldsymbol{g}$）とに分けられる．ある質量要素の速度は二つの要因によって変化する．まず，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\, t)$ が陽に時間に依存するために変化し，さらに質量要素が $dt$ の間に $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$ 動き，その際 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\, t)$ が場所に依存しているために変化する．式でそれを示すために $\boldsymbol{v}(x,\, y,\, z,\, t)$ に関する全微分を導関数で書き下すと

$$d\boldsymbol{v} = dt\, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + dx\, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + dy\, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + dz\, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = \left( \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} \right) dt \tag{7.1}$$

を得る．真ん中の式から最右辺の式に移るときに $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$ が使われている．ニュートンの運動方程式 $\varrho\, d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{f}_{\mathrm{N}}$ にこの式と分割された力とを使うと

$$\varrho \left( \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} \right) = -\nabla P + \boldsymbol{f}_0 \tag{7.2}$$

を得る．この方程式は**オイラー方程式**と呼ばれている．さらに，質量は保存されるので次の連続の式

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho\, \boldsymbol{v}) = 0 \tag{7.3}$$

が成り立つ．オイラー方程式(7.2)と連続の方程式(7.3)が，完全流体に対する非相対論的な場の方程式である．これらの方程式の導出は，(簡単な応用とともに）著者の *Mechanik*（力学）[文献 7] 32 節に詳述されている．

四つの方程式(7.2)，(7.3)は，五つの場の未知数 $v^i$，$P$，$\varrho$ を決めるには不十分である．これらに加えて，$\varrho$ と $P$ の関係を示す状態方程式が必要である．たとえば，非圧縮性流体に対しては $\varrho = \text{const.}$ となり，温度 $T$ の理想気体に対しては $P = \text{const.} \cdot \varrho$ となる．

われわれは，流体力学の基礎方程式(7.2)と(7.3)の相対論的一般化を行いたい．それにはまず，$v^i(\boldsymbol{r}, t)$ をローレンツ・ベクトル場 $u^\alpha(x)$ で置き換えなければならない．引数 $x$ は $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ を意味している．オイラー方程式(7.2)の左辺は速度の二乗であり，そして密度に比例している．ここで行列

$$M^{\alpha\beta} = \varrho\, u^\alpha u^\beta \tag{7.4}$$

を考えてみよう．そして質量密度 $\varrho(x)$ の定義を次のようにしてはっきりさせる．すなわち，$\varrho$ は慣性系 IS′ で定められ，そこでは考えている流体要素（$x$ 点の $\Delta V$）は瞬間的に止まっているとする．その系で次のように定められた**質量密度** $\varrho$

$$\varrho = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\text{静止質量}}{\text{固有体積}} \tag{7.5}$$

はローレンツ・スカラーである．よって，$M^{\alpha\beta}$ はローレンツ・テンソルである．$(u^\alpha) = \gamma\,(c, v^i)$ と $\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2$ とを考慮すれば，$M^{\alpha\beta}$ は $v^i$ を使って次のように表せる．

$$M^{\alpha\beta} = \varrho\gamma^2 c^2 \begin{pmatrix} 1 & v^1/c & v^2/c & v^3/c \\ v^1/c & & & \\ v^2/c & & v^i\, v^j/c^2 & \\ v^3/c & & & \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

次の量

$$\widetilde{\varrho} = \frac{M^{00}}{c^2} = \gamma^2\, \varrho = \frac{\varrho}{1 - v^2/c^2} \tag{7.7}$$

を**エネルギー質量密度**と呼ぶ．$\varrho$ はローレンツ・スカラーとして定義されたので，$\widetilde{\varrho} = \gamma^2\,\varrho = M^{00}/c^2$ はあるテンソルの 00 成分として変換される．この流儀で，時にはローレンツ・スカラー $m$ の代わりに“相対論的な質量” $\widetilde{m} = \gamma m = p^0/c$ が導入されることもある．これらの量 ($m$ と $\widetilde{m}$) のうちどちらを質量と呼び，($\varrho$ と $\widetilde{\varrho}$ の) どちらを質量密度と呼ぶかは便宜的なものであり，用いる目的による．非相対論の極限では，これらの量はどちらも等しい．しかし相対性理論では，$\widetilde{m}$ と $\widetilde{\varrho}$ は 4 元テンソルの成分として定義されなければならない．

ここで選ばれた質量密度の定義 (7.5) は，電磁気の電荷密度 $\varrho_{\rm e}$ の定義には対応しない．電荷密度は 6 節でベクトルの 0 成分，$\varrho_{\rm e} = j^0/c$，として定義されており，これは体積当たりの電荷であって固有体積あたりの電荷ではない．2 節で，片や静電気学と電気力学との比較，一方でニュートン理論と一般相対論の比較から $\varrho_{\rm e}$ 類似の量を引き出した．それがここで言うエネルギー質量密度 $\widetilde{\varrho} = M^{00}/c^2$ である．

$M^{\alpha\beta}$ の発散

$$\partial_\beta\, M^{0\beta} = c\,\left[\,\partial_t\,\widetilde{\varrho} + \partial_k\,(\widetilde{\varrho}\,v^k)\,\right] \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned} \partial_\beta\, M^{i\beta} &= \partial_t\,\left(\widetilde{\varrho}\,v^i\right) + \partial_k\,\left(\widetilde{\varrho}\,v^i\,v^k\right) \\ &= \widetilde{\varrho}\,\left(\partial_t\,v^i + v^k\,\partial_k\,v^i\right) + v^i\,\left[\partial_t\,\widetilde{\varrho} + \partial_k\,\left(\widetilde{\varrho}\,v^k\right)\right] \end{aligned} \tag{7.9}$$

を考えよう．非相対論の極限では，これらの表式は (7.3) と (7.2) の左辺に帰する．よって力が掛かっていないとき ($P = 0$, $\boldsymbol{f}_0 = 0$)，以下に述べるように (7.3) と (7.2) の相対論的一般化は

$$\partial_\beta\, M^{0\beta} = 0 \qquad \text{(連続の式)} \tag{7.10}$$

$$\partial_\beta\, M^{i\beta} = 0 \qquad \text{(力が掛かっていないオイラー方程式)} \tag{7.11}$$

となる．これらの式は

$$\partial_\beta\, M^{\alpha\beta} = 0 \tag{7.12}$$

のようにまとめられる．非相対論的極限でこの共変な方程式は，正確でよく知られた方程式 (7.2) と (7.3) に帰する．よって (7.12) は，(力がかかっていない

場合に）相対論的に成り立つ方程式である．内容的には(7.10)はエネルギーの連続の方程式であり，(7.11)は運動量の連続の方程式である．よって，(7.12)は流体の4元運動量密度に対する微分形の保存則である．

さて(7.12)に圧力を考慮したい．“圧力掛ける面積は力に等しい”という言い方の一般的な定式化は

$$dF^i = \sum_{j=1}^{3} P^{ij}\, dA^j \tag{7.13}$$

である．一般に，力 $d\,F^i$ が面積ベクトル $d\,A^i$ に平行ではないような非等方媒質に対して，このような式が必要である．さて，ある流体を考え，その流体要素が瞬間的に静止している慣性系 IS′ で，次の等方な圧力

$$\left(P'^{ij}\right) = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{瞬間的にいっしょに}\\ \text{走っている系 IS}'\text{ において}\end{array}\right) \tag{7.14}$$

を仮定する．この量が相対論的に一般化されたものは4元テンソル $P^{\alpha\beta}$ でなければならない．局所的，かつ瞬間的な静止系 IS′ では(7.2)と(7.3)とが成り立つ．こうして(7.10)は変わらないが，(7.11)には追加の項 $\partial'_i P = \partial'_j P'^{ij}$ がなければならない．そのためには(7.12)の左辺に4元ベクトル

$$\left(\partial'_\beta P'^{\alpha\beta}\right) = (0,\, \partial'_i P) \tag{7.15}$$

が加わらなければならない．結局，(7.15)から

$$\left(P'^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{瞬間的にいっしょに}\\ \text{走っている系 IS}'\text{ において}\end{array}\right) \tag{7.16}$$

となる．$P$ は考えている体積要素が静止している慣性系 IS′ で測られた圧力である．この**固有圧力** $P(x)$ は，質量密度のようなローレンツ・スカラーであるのでマークは付けられていない．

点 $x$ の流体要素が $u^\alpha(x)$ で動いているような慣性系 IS では，圧力テンソル $P^{\alpha\beta}$ は $-\boldsymbol{v}$ をもつローレンツ変換で与えられる．すなわち，$P^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma\,\Lambda^\beta_\delta\,P'^{\gamma\delta}$ となる（演習 7.1）．結果は次のようになる．

$$P^{\alpha\beta} = P\left(\frac{u^\alpha\,u^\beta}{c^2} - \eta^{\alpha\beta}\right) \tag{7.17}$$

これはローレンツ・テンソルであり，さらに $(u'^\alpha) = (c,\,0)$ であるので IS$'$ では (7.16) に帰する．よってこの表式は正しい．共変な方程式

$$\partial_\beta\,M^{\alpha\beta} + \partial_\beta\,P^{\alpha\beta} = 0 \tag{7.18}$$

は，非相対論の極限で (7.3) と $\boldsymbol{f}_0 = 0$ とおいた (7.2) になる．われわれはこれを

$$\partial_\beta\,T^{\alpha\beta} = 0 \tag{7.19}$$

と書く．ここで，$T^{\alpha\beta}$ は次のエネルギー運動量テンソルである．

$$\boxed{T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\varrho + \frac{P}{c^2}\right)u^\alpha\,u^\beta - \eta^{\alpha\beta}\,P} \tag{7.20}$$

$T^{\alpha\beta}$ が**エネルギー運動量テンソル**として説明がつくということは次の節で示される．外力（(7.2) の $\boldsymbol{f}_0$）がある場合には，対応しているミンコフスキー応力密度 $f^\alpha$

$$\boxed{\partial_\beta\,T^{\alpha\beta} = f^\alpha \qquad \text{(7.2) と (7.3) の相対論的一般化}} \tag{7.21}$$

を加えなければならない．これが流体力学の相対論的基礎方程式である．

4 節とここで，物理法則がある特別の方法で導出されることがわかった．その手法で

1. ローレンツ変換のもとでは共変であり，
2. $v \ll c$ ではよく知られたニュートンの極限に帰する

ような方程式が求められた．これが既知の（非相対論的）法則を相対論的に一般化する一つの方法である．また，このような一般化の手法で静電気学から電気力学を導くことができる．このようにして得られた一般化方程式の正

しさは，最終的にはその方程式が予測することと実験との比較から決まる．その際，その予測はもともとの理論が予測するものよりほとんどの場合はるかに内容豊かである．たとえば磁場を考えてみよう．それは $\Delta\Phi_{\rm e} = -4\pi\,\varrho_{\rm e}$ の相対論的一般化から出てくる[13)]．この類推でわれわれは，（重力）“磁気”効果を $\Delta\Phi = 4\pi G\,\varrho$ の一般化から予測することができる[14)]．

19 節で（そこでは特に一般相対論を考慮して）くわしく議論されるが，ここで述べた導出の手法は次の一般的な原理に従う．すなわち

1. 特定の変換のもとで共変である，そして
2. すでにわかっている方程式に特定の極限で帰着する

ような方程式が求められる．

**演習**

7.1: 考えている流体に対してその流体要素が瞬間的に静止している系で，圧力テンソルは

$$\left(P'^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{瞬間的にいっしょに}\\ \text{走っている系 IS}'\text{ において}\end{array}\right)$$

となる．これにローレンツ変換をほどこせ．これは一般形

$$P^{\alpha\beta} = P\left(\frac{u^\alpha\,u^\beta}{c^2} - \eta^{\alpha\beta}\right)$$

をもたらすことを示せ．

13) 訳注：(2.4) を見よ．
14) 訳注：30 節を見よ．

# 8 エネルギー運動量テンソル

完全流体のエネルギー運動量テンソル(7.20)，すなわち

$$T^{\alpha\beta} = \left(\varrho + \frac{P}{c^2}\right) u^\alpha\, u^\beta - \eta^{\alpha\beta}\, P \tag{8.1}$$

は相対論的重力理論における場の源である．われわれは，$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ から得られる保存量を定めることにする．さらに，エネルギー運動量テンソルに対する他のエネルギーの寄与を議論し，そして(8.1)が応用できる例を考察する．

## エネルギー運動量保存

孤立系を考えよう．このような系は他の系とは相互作用しない．したがって，(7.21)において $f^\alpha = 0$ となり

$$\boxed{\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{エネルギーと運動量の連続の式}} \tag{8.2}$$

が得られる．まず最初に，エネルギー運動量テンソル(8.1)をこれにあてはめよう．そして後ほど一般的な場合を考える．

考えている系が空間的な境界をもっているとしよう．すると，系が完全に内包されるようなある体積 $V$ が考えられる．(8.2)をこの $V$ にわたって積分する． $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_0 T^{\alpha 0} + \partial_i T^{\alpha i}$ を考慮すると

$$\frac{\partial}{\partial(ct)} \int_V d^3r\, T^{\alpha 0} = -\int_V d^3r\, \partial_i T^{\alpha i} = -\int_{S(V)} dS_i\, T^{\alpha i} = 0 \tag{8.3}$$

を得る．この際，ガウスの定理を使って体積積分を面積分に変えた．系は $V$ の内部にあるから，面 $S(V)$ にわたる積分はゼロになる．したがって(8.3)から

$$\boxed{P^\alpha = \frac{1}{c}\int d^3r\, T^{\alpha 0} = \text{const.} \qquad \text{孤立系でのエネルギー運動量の保存}} \tag{8.4}$$

が出る．系が完全に含まれる有限の体積の代わりに全空間にわたる積分を考えてもよい．(8.3)に関する取り扱いでは，非常に離れた距離では被積分関数 $T^{\alpha i}$ は十分早くゼロに向かうというだけで十分である．

$P^\alpha$ は運動量の次元である．さらにそれはローレンツ・ベクトルであり，このことは演習 5.3 と同じようにして示すことができる．よって $P^\alpha$ は $T^{\alpha\beta}$ によって記述される場の 4 元運動量であり，保存されている．すなわち，$cP^0$ は場のエネルギーであり， $P^i$ は場の運動量である．これから $T^{0\alpha}$ の成分に対して

$$T^{00} = \text{エネルギー密度}, \qquad T^{0i}/c = \text{運動量密度} \tag{8.5}$$

という解釈が出てくる．そして方程式(8.2)はエネルギーと運動量の保存に関する微分型の表現である．

## 一般的なエネルギー運動量テンソル

エネルギーと運動量の保存は孤立系に対してだけ成り立つ．(保存則を考えるためには）系のなかで相互作用しているいろいろな部分系を考察しなければならない．この例として，電磁力が働いている帯電した流体を考えよう．応力密度 $f^\alpha$ は電磁場から与えられる．(6.20)よりわれわれは

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = f^\alpha = -\partial_\beta T^{\alpha\beta}_{em} \tag{8.6}$$

または，

$$\partial_\beta \left(T^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{em}\right) = 0 \tag{8.7}$$

を得る．エネルギー運動量保存は流体と電磁場に対して別々に成り立つのではなく，総合した系に対して成り立つ．

帯電した流体や電磁場以外に，考えている系に他の要素が加わるときは，それは(8.7)の右辺に力として現れる．(8.6) → (8.7)に似たようなやり方で，この力はエネルギー運動量テンソルの成分の一つに変形される．よって原理的に存在するすべてのエネルギーは，次のようにエネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ に取り込まれる．

$$\boxed{T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{em} + \cdots} \tag{8.8}$$

この一般化されたエネルギー運動量テンソルに対して

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \qquad T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \tag{8.9}$$

が成り立つ．(8.8)におけるそれぞれの項の対称性が $T^{\alpha\beta}$ に反映されている．(8.6)，(8.7)に示したように，集合系に対しても保存則 $\partial_\beta T^{\alpha\beta}=0$ が成り立っている．別々の系が相互作用していないとすれば，どの系に対しても保存則が成り立つ．

## 重力場の源

相対論的重力場の方程式において，エネルギー運動量テンソルが源の項になるということをはっきりさせよう．このために関係しているいくつかの量を使って，2 節で少し触れた議論をここでより具体的に述べる．

われわれは電気力学との類似性を再び参考にする．静電気学では電荷密度 $\varrho_\mathrm{e}$ が場の源である．動的な理論（電気力学）では，電荷の保存則 $\partial_\alpha j^\alpha=0$ がある．ここで $j^0=c\,\varrho_\mathrm{e}$．それで静電気学の相対論的一般化では，源の項に関する置き換え $\varrho_e\to j^\alpha$ が伴う[15]．

ニュートンの重力理論では質量密度 $\varrho$ が場の源である．4 節ではあらゆるエネルギーは質量密度に寄与できるということをいくつかの例を使って議論した．これらのすべての例に関して保存則は $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=0$ である．

電気力学の連続の式 $\partial_\alpha j^\alpha=0$ は保存式 $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=0$ に対応している．よって $\widetilde{\rho}=T^{00}/c^2$ は $\varrho_e=j^0/c$ に類似の量である．一般化 $\varrho_e\to j^\alpha$（静電気学から電気力学）は $\widetilde{\varrho}\to T^{\alpha\beta}$（ニュートンの重力理論から一般相対論）に対応している．ニュートンの極限では $\widetilde{\varrho}$ と $\varrho$ の違いはなくなっているから，このことは(1.5)の右辺に $\varrho\to T^{\alpha\beta}$ と置くことを意味している．

エネルギーが質量と等価であるために，すべてのエネルギーは質量に寄与することができる．したがって，どんな形のエネルギーでも重力場の源となるはずであるから，すべての寄与が(8.8)で考慮されるべきである．しかしながら，重力場自身のエネルギーへの寄与に対しても同じようになるのかどうかはまだわからない．というのは，ある特定の場のエネルギー運動量テンソルは，対応する場の理論から導き出されるからである．われわれは，アインシュタイン方程式の設定（21 節）の際にこの問題に戻ることにする．

---

[15] 訳注：(2.2)を見よ．

**応用**

これからの応用では(8.8)の一般形を要求しないで，むしろ完全流体のエネルギー運動量テンソル(8.1)から始める．(8.1)の応用範囲は普通の流体をはるかに越えているから，これは非現実的ではない．(8.1)に対する前提は，考える物理系は質量密度 $\varrho$，速度場 $\boldsymbol{v}$，等方圧力 $P$ で書き表すことができるというものである（$\varrho$ と $P$ はいずれも，局所的で瞬間的に静止している系のもの）．これらの仮定は気体に対してはもちろん，固体に対しても成り立つ．これに関連していくつかの例を考えよう．

(a) 原子や分子からなる気体：それぞれの原子の速度 $\boldsymbol{v}_n$ は体積要素の静止質量に寄与する．(4.16)を見よ．その上さらに，速度は圧力を決め，そしてエネルギー運動量テンソルに寄与する．ある体積要素 $\Delta V$ 中の原子の平均速度 $\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v}_n \rangle$ は，体積要素の場所での速度場 $(u^\alpha) = \gamma\,(c,\, v^i)$ を決める．

通常，気体の平均速度は個別粒子の統計平均速度 $(\langle |\,\boldsymbol{v}_n\,| \rangle)$ よりずっと小さい．たとえば，室温の空気に対しては $\langle |\,\boldsymbol{v}_n\,| \rangle \approx 400$ m/s であるが，平均の流速は $v \sim 1$ m/s くらい（隙間風），または $v \sim 30$ m/s（ハリケーン）である．

質量密度や圧力に対するそれぞれの原子速度の寄与は，オーダーとして $(\langle |\,\boldsymbol{v}_n\,| \rangle / c)^2 \ll 1$ である．圧力には理想気体の法則 $P \approx N\,k_{\rm B}\,T/V$ が成り立つ．$k_{\rm B}\,T \sim m\,\langle |\,\boldsymbol{v}\,| \rangle^2$ であるので，$P \sim \varrho\,\langle |\,\boldsymbol{v}\,| \rangle^2 \ll \varrho c^2$ である．エネルギー運動量テンソルへの圧力の寄与は，かくして $(\langle |\,\boldsymbol{v}_n\,| \rangle / c)^2 \ll 1$ である．一方，平均速度はエネルギー運動量テンソルに $v/c$ のオーダーで現れる．

(b) 固体または流体：流体あるいは原子からなる固体では，いつも $P \ll \varrho\, c^2$ が成り立つ．さもなければ，原子の殻は圧力に耐えることができない．よって(8.1)では圧力の寄与は無視してよい．固体に対しては，速度場 $u^\alpha$ は剛体としての回転から生じることもあるだろう．

(c) 光子ガス：光子のエネルギー密度は $u_{\rm em}$ であり，質量密度への寄与は $\varrho_{\rm rad} = u_{\rm em}/c^2$ である．すでに(4.16)で述べたように，箱（または

星）の中の電磁放射は箱の質量（静止質量）に寄与する．光子ガスの圧力は $P = u_{\mathrm{em}}/3 = \varrho_{\mathrm{rad}}\, c^2/3$ である．

光子ガスの運動量分布と圧力が等方的である慣性系で上の諸式は定められている．よってこの系では，(8.1)の $(u^\alpha)$ は $(u^\alpha) = (c, 0)$ と置かれる．そうでないときは，$u^\alpha$ は，光子ガスの圧力などが等方である慣性系に対して，相対的に動いている慣性系の速度である．$\varrho_{\mathrm{rad}} = u_{\mathrm{em}}/c^2$ に取り入れられている統計的な電磁場は，(8.8)の $T_{\mathrm{em}}^{\alpha\beta}$ には現れない．

例の(a)と(b)に現れた速度が非相対論的であるとき，物質の静止エネルギーは運動エネルギーの寄与に比べてはるかに大きい．このとき

$$T^{00} \approx \varrho\, c^2, \qquad \frac{T^{0i}}{T^{00}} \approx \frac{v^i}{c} \ll 1, \qquad \frac{T^{ij}}{T^{00}} = O\left((v/c)^2,\, P/\varrho\, c^2\right) \ll 1 \tag{8.10}$$

が成り立つ．よって多くの応用に対しては次の近似

$$(T^{\alpha\beta}) \approx \begin{pmatrix} \varrho\, c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{（非相対論的極限）} \tag{8.11}$$

で十分である．この近似は，たとえば以下のような系で可能である．

- 地球：地球の質量密度を $\varrho(\boldsymbol{r})$ であるとしよう．$\boldsymbol{v} = 0$ としたオイラー方程式は，(場所依存性のある) 重力場 $\boldsymbol{g}$ 中の物質に対して $\nabla P = \varrho\, \boldsymbol{g}$ となる．これから，$P \sim |\nabla P|\, R_{\mathrm{E}} \sim \varrho\, g\, R_{\mathrm{E}} = \varrho\, c^2\,(g\, R_{\mathrm{E}}/c^2) \lesssim 10^{-9}\,\varrho\, c^2$ が出る．ここでは地球半径 $R_{\mathrm{E}} \approx 6400$ km と重力加速度 $g \lesssim 10$ m/s$^2$ が使われている．$P \ll \varrho\, c^2$ であるので，エネルギー運動量テンソルへの圧力の寄与は無視できるほど小さい．地球の回転は(8.1)の $u^\alpha$ に入る速度 $v^i \neq 0$ を生じる．$v^i \ll c$ であるから，またこの寄与はほとんどの場合無視してよい．しかしながら 30 節では，(8.11)の次のオーダー，すなわち $v/c$ のオーダーの効果を調べる．
- 太陽：$P \ll \varrho\, c^2$ と $v \ll c$ が成り立つので(8.11)の近似が可能である．

この近似はまた，たとえば白色矮星のような他のタイプの星に対しても成り立つ．

- 宇宙：十分広い領域（たとえば $10^8$ 光年）で平均すれば，銀河や星々の質量は連続な質量密度で記述することができる．初期宇宙（54 節）は高温の相対論的ガスの状態であったが，現在の宇宙では(8.11)が成り立っている．そして，宇宙背景放射は宇宙の質量密度に $\varrho_{\rm rad} = u_{\rm em}/c^2$ だけの寄与をする．

# III　一般相対性理論の物理的な基礎

## 9　基準系

特殊相対論の基本方程式は慣性系でだけ成り立つ．慣性系について議論した後，加速度基準系へ移行する際に生じるいろいろな変更を検討する．

### 慣性系

ニュートンの運動方程式はすべての慣性系(IS)で同じ形をとる．このことをガリレイ変換(3.1)，(3.2)のもとで共変であるという．しかしながら，その方程式は加速度基準系では別の形を取る．このような系では，回転系におけるコリオリ力や遠心力のような追加の力が現れる．これらの慣性力がないことで，慣性系は実験的に特別な系である．

慣性系の顕著な役割は，絶対空間や絶対時間が存在する証拠と見なされてきたことである．水を入れたバケツを紐で吊して回転させると，平らであった水の表面は湾曲して凹む．ニュートンに従えば，この実験は絶対空間に対する加速度運動を示している．すなわち，最初は水は絶対空間に静止しており，それから絶対空間に対して回転する．この記述はよいとしても，互いに相対的に動いている慣性系がなぜ同じ資格をもつのかを絶対空間は明らかにしてくれない．われわれはむしろ，絶対空間に対して静止しているある特別な慣性系があるものと期待していたのである．

アインシュタインが特殊相対論を作り上げる1905年以前は，われわれは動いている慣性系と止まっている慣性系を，光の伝搬を使って区別できると予

想していた．さらにガリレイ変換は，慣性系の間に当然成り立つ正確な変換であるとされていた．よってマクスウェルの理論は，“相対論的”ではないという欠陥をもっていた．マクスウェル自身，仮想的な**エーテル**（ether, 光を運ぶ物質）に対して静止している慣性系に対してだけ，彼の方程式は成り立つはずであると思っていた．この系に相対的に動いている慣性系では，光速が変わるだろうと考えられていたのである．

ところが，光速はすべての慣性系で等しいということが実験的に示された(マイケルソンとモーレイ，1887 年)．それでアインシュタインは，すべての慣性系で物理法則は**マクスウェル方程式を含めて**同じ形をもつという，修正された相対性原理を立てた．これからガリレイ変換は正しくない（または正確ではない）ということが出てくる．むしろ慣性系の間の正しい変換は 3 節に導いたローレンツ変換である．

しかし，このことは慣性系の特殊性を少しも変えない．すなわち，ガリレイ変換もローレンツ変換も慣性系という同じ類（クラス）の座標系同士を結びつけるだけである．実際，**絶対時間**や**絶対空間**の概念は特殊相対論では**相対化されるが**，特定の基準系，まさに慣性系を特別視する**絶対時空構造**は残っている．

慣性系を特別視する理由は明らかではない．すなわち，何（絶対空間？）に対してこの系は加速されないのかが疑問として残る．加えて，慣性系であるがために特別視される空間は物体の運動に影響を与えるが，物体は何らの反作用もこの空間に与えないという困難に遭遇する．

どちらかと言えば形而上学的な考察に基づく批判（ライプニッツ(Leibniz), 1646-1716）や擁護（オイラー(Euler), 1707-1783, カント(Kant), 1724-1804）について，絶対空間への最初の建設的な批判がマッハ（Mach, 1838-1916）によって与えられた．マッハは回転の際の遠心力を，**地球や他の天体に相対的に**加速運動をすることで引き起こされる力と解釈した．マッハによれば，空間それ自身には特別の意味はなく，それは単なる添え物にすぎない．重要なのは物体の相対的な関係(距離，運動)だけである．したがって，ある物体の慣性質量は何らかのやり方で他のすべての質量から定められるべきである．そしてある場所の慣性系は，他のすべての質量の場所と運動の適切な平均に

よって決められるであろうと彼は主張した.

ニュートンのバケツの実験に対して，マッハは次のように書いている[1]. “容器の壁がどんどん厚くかつ重くなり，ついには5～6マイルにもなったらその実験が定量的にしろ定性的にしろどうなるかは定かではない.” もし他の質量（地球，星）が実際に慣性系を決めるのであれば, 回転する容器の壁が厚くなればなるほど，水面の曲がりはますます減少しなければならない．もっと哲学的かつ仮説的に定式化して言うことができる．すなわち，もしバケツの壁が他の**すべて**の質量（宇宙のすべての銀河）を含んでいるのであれば, “バケツが回っている”という言い方はその意味を失う．回転はしているのだが，もはやそれはどうでもよいことであり，よって遠心力は発生するはずがない.

今日，われわれは**マッハ原理**を，他の質量（星，銀河）が慣性系を決定するという仮説であると理解している．次の簡単な実験はこのマッハ原理を支持する．すなわち，星の輝く空のもとで人が回転すれば，腕は遠心力を受け，同時にこの基準となる人に対して星は回転する．問題となるのは，星々は遠心力が発生しないようなその基準系で**たまたま**止まっているのか，それとも星々は，それら自身ではその慣性系を定められないのかということである.

**マッハ原理**という術語は，マッハの死後1918年に，アインシュタインによって作り出された．彼の場の方程式に照らして，アインシュタインは源の項（宇宙の質量）は空間の計量（そして，それによって局所慣性系[2]）を決めると解釈していた．実際，一般相対論はマッハが投げかけたいくつかの疑問, 特に空間への質量の反作用に関する疑問に答えている．しかし全体としては，一般相対論はマッハの考えを現実のものとしたのではなかった．マッハが主張したようには，一般相対論では空間は排除されていない．空間とその動力学はむしろ中心的な役割を演じており，たとえば重力波は真空空間の励起モードとして現れる．しかし同時に，空間の構造と動力学はそこに存在する質量と密接に関連している．あたかも電磁気学の電荷と電磁場のように,

---

[1] E.Mach, *Die Mechanik*, 226ページ, 9版, Brockhausverlag, Leipzig 1933, （伏見譲訳：マッハ力学, 215ページ, 講談社, 昭和44年）.

[2] 訳注：局所慣性系については10節を参照.

質量と空間は互いに作用しあっている．

アインシュタインはマッハの考えに影響を受けているが[3]，一般相対論はこの理念を数学的に構築したのではなく，それは別の出発点をもっている（10節）．それにもかかわらず一般相対論はいくつかのマッハの考えを認め，さらにそれらが計算可能であることを示している．特に，水面の湾曲がバケツの壁の質量の増加とともに減少するということは定量的に計算できる（30節）．また慣性系と宇宙における質量分布との関係は，アインシュタインの場の方程式の解に基づいて明らかにされるであろう（44節）．

## 特殊相対論における加速された基準系

慣性系では，特殊相対論の法則はよく知られた不変形（共変形）である．慣性系の特殊性を知るために，慣性系を加速された基準系に移行させて，その際に起こる変更点を調べよう．

(4.4)，(6.6)，(6.12)，(7.21)のような特殊相対論の法則は，慣性系でだけそれらの形式が成り立つ．しかし他の基準系は不適であるということでは**ない**．そこで（たとえばコマの運動に用いる）古典力学の回転基準系を使おう．もちろん，基本法則（ニュートンの原理）は慣性系でだけ成り立つ．非慣性系も許されるが，そこでは法則は通常の形は取らないだけである．たとえば，ニュートンの運動方程式（第二法則）を回転系へ変換すると，方程式には追加の項（遠心力とコリオリ力）が現れる．

例として，（座標 $x'^{\nu}$ をもつ）座標系 KS$'$ を考えよう．その系は（$x^{\alpha}$ をもつ）慣性系に対して一様に回転しているものとする．$x'^{\nu}$ と $x^{\alpha}$ の間の一つの簡単な変換は

$$
\begin{aligned}
x &= x'\,\cos(\omega t') - y'\,\sin(\omega t'), \qquad & z &= z' \\
y &= x'\,\sin(\omega t') + y'\,\cos(\omega t'), \qquad & t &= t'
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

で与えられる．われわれは領域を $\omega^2\,(x'^2 + y'^2) \ll c^2$ に制限する．よく知られた慣性系の線素 $ds$ に(9.1)を代入すると

[3] マッハの理念とアインシュタインへの影響についての詳細な議論が，マッハの原理に関する次の本に書かれている．*Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, ed. by J.Barbour and H. Pfister, Birkhäuser, Boston 1995.

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\
&= \Big[ c^2 - \omega^2 (x'^2 + y'^2) \Big]\, \mathrm{d}t'^2 + 2\,\omega\, y'\, dx'\, dt' - 2\,\omega\, x'\, dy'\, dt' \\
&\quad - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = g_{\mu\nu}(x')\, dx'^\mu\, dx'^\nu
\end{aligned} \tag{9.2}
$$

を得る．このように非慣性系では線素 $ds$ は複雑な形になる．$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ は特殊相対論の基礎であった．したがって座標系 KS′ では，運動方程式は別の形をもつことになる[4)]．まず最初に，$ds^2$ は**任意の**座標 $x'^\nu$ に関して座標微分の 2 次形式になっているということを示そう．そのために（慣性系 IS の）$x^\alpha$ と（座標系 KS′ の）$x'^\nu$ との間の一般的な座標変換を

$$
x^\alpha = x^\alpha(x') = x^\alpha\,(x'^0,\, x'^1,\, x'^2,\, x'^3) \tag{9.3}
$$

とする．これから

$$
ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\, dx'^\mu\, dx'^\nu = g_{\mu\nu}(x')\, dx'^\mu\, dx'^\nu \tag{9.4}
$$

を得る．われわれは次の表式

$$
\boxed{g_{\mu\nu}(x') = \eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}} \tag{9.5}
$$

によって，座標系 KS′ の**計量テンソル**を定義する．計量テンソルは対称，すなわち $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ であり，座標 $x' = (x'^0,\, x'^1,\, x'^2,\, x'^3)$ の関数である．この量 $g_{\mu\nu}$ は，座標系の異なった点の間の距離 $ds$ を定めるから**計量的であると**呼ばれる．**テンソル**という呼び方に関しては後ほど考察する．$g_{\mu\nu}$ は(9.2)のように，$ds^2$ に対する表式から読み取ることができる．

われわれは，加速度系では慣性力が発生することを知っている．加速度系のなかでも回転基準系では遠心力 $\boldsymbol{Z}$ が発生する．それは遠心力ポテンシャル $\Phi$ を使って

$$
\Phi = -\frac{\omega^2}{2}\left(x'^2 + y'^2\right) \quad \text{そして} \quad \boldsymbol{Z} = -m\,\nabla\,\Phi \tag{9.6}
$$

---

4) 訳注：$ds$ をラグランジュ関数密度として運動方程式を出すことが多い．$g_{\mu\nu}$ の形が異なれば運動方程式も異なる．

と書き表せる．(9.2)から $g_{00}$ は $\Phi$ と

$$\boxed{g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \tag{9.7}$$

のように結びつけられることが見て取れる．遠心力ポテンシャルは，計量テンソルのなかにこのように入っている．11 節で詳細に見るように，計量テンソルをまず導出することが相対論的運動方程式の力の項を定めることになる．それゆえ $g_{\mu\nu}$ は相対論的ポテンシャルと考えてよい．$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ に座標変換を持ち込んでも $ds$ の意味は変わらず，ただ $ds$ の表現が変わるだけである．特に，時計の読みに関して(3.30)の $ds_{\rm clock} = c\, d\tau$ は成り立つ．これによって座標系 KS′ に静止している $(dx' = dy' = dz' = 0)$ 時計の読み $\tau$ と座標系 KS′ の時間座標 $t'$ の間の関係を

$$d\tau = \frac{ds_{\rm clock}}{c} = \sqrt{g_{00}}\, dt' = \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}\, dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{9.8}$$

のように定めることができる．最初の慣性系で時計の固有時 $d\tau$ を定めるとしたときは(3.28)，すなわち最右辺の表示を与える．$v = \omega\rho$ であるので，これは座標系 KS′ の結果（(9.8)の最後から 2 番目の表示）と一致する．

計量テンソル $g_{\mu\nu}(x')$ は座標の関数である．このような座標依存性は曲線座標に対しても起こる．たとえば円柱座標

$$x'^0 = c\,t, \qquad x'^1 = \rho, \qquad x'^2 = \phi, \qquad x'^3 = z \tag{9.9}$$

に対して，線素

$$\begin{aligned} d\,s^2 &= c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2\, dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\phi^2 - dz^2 = g_{\mu\nu}(x')\, dx'^\mu\, dx'^\nu \end{aligned} \tag{9.10}$$

を得るが，この際，計量テンソルは $(\,g_{\mu\nu}\,) = {\rm diag}\,(1, -1, -\rho^2, -1)$ となる．かくして，計量テンソルの座標依存性は考えている基準系の加速度や非デカルト座標の使用のためであることがわかる．

加速している基準系で相対論効果が考えられるような例を示そう．そのため演習 4.1 の双子を考える．双子 1 は近似的に慣性系である地球に留まり，

双子 2 は宇宙飛行を行う．彼のロケットはある加速度座標系 KS′ になる．出発点の時空の点をまとめて A とし，帰還の点を R とする．双子 1 の生活時間（または地球上の時計）は（ロケットが）帰還したとき，時間間隔

$$T_1 = \frac{1}{c}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} ds_1 = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} dt = t_{\mathrm{R}} - t_{\mathrm{A}} \tag{9.11}$$

を示している．ロケットに乗っている時計 2 は速度 $\boldsymbol{v}(t)$ で動き，したがって固有時間間隔

$$T_2 = \frac{1}{c}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} ds_2 = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{R}} dt\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}} = T_1\sqrt{1-\frac{\langle v^2\rangle}{c^2}} < T_1 \tag{9.12}$$

を示す．ここで $\langle v^2\rangle$ は適当な時間平均値である．よって R で時計 2 は時計 1 より短い時間を示す．すなわち，双子 2 は帰還したとき双子 1 より若い．今の二つの時間は地球慣性系で(3.29)から決められた．

ロケットの基準系にいて，（ここから見て）運動している地球上の時計の固有時を計算するためにわれわれが特殊相対論の法則を当てはめようとすると，見かけ上のパラドックスが起こる．それは，時計 1 は時刻 $T_2$ を，時計 2 は時刻 $T_1$ を示すに違いないと考えることであるが，しかしこの議論は間違っている．たしかに，時計 2 が乗っている座標系 KS′ にわれわれは移ることはできるが，この系は必然的に $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ をもつ座標系 KS′ である．このため座標系 KS′ で時計の読みを計算しようとすると面倒なことになり，特に(3.29)は座標系 KS′ に対しては成り立たない．座標系 KS′ で（(3.29)のような）特殊相対論の法則を適用するのは，円柱座標系で（$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$ の代わりに）$ds^2 = d\rho^2 + d\phi^2$ にわたって距離を計算することか，あるいは，メリーゴーランドの上で玉突きをする人が（玉の動きを）予測するようなものである．

座標系 KS′ に時計 2 が乗っているとして，その表示時刻の計算はいったいどのようなものだろうか？　このような座標系 KS′ への変換が

$$t = t', \qquad x = x' + \frac{g\,t'^2}{2}, \qquad y = y', \qquad z = z' \tag{9.13}$$

であるとしよう．ただし考えている時間はあまり長くないものとする．短い時間に対しては，座標系 KS′ の原点は慣性系 IS に相対的に一定の加速を受

けているだろう．座標系 KS$'$ における線素は(9.13)から

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = (c^2 - g^2\,t'^2)dt'^2 - 2\,g\,t'\,dx'\,dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (9.14)$$

となる．これから，KS$'$ に乗っている $(dx' = dy' = dz' = 0)$ 時計 2 は読み

$$T_2 = \frac{1}{c}\int_{\rm A}^{\rm R} ds_2 = \int_{\rm A}^{\rm R} dt'\sqrt{1 - \frac{g^2 t'^2}{c^2}} = \int_{\rm A}^{\rm R} dt\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} \quad (9.15)$$

を示す．よって時計 2 は慣性系で計算した値(9.12)，(それは今，座標系 KS$'$ で求めたものであるが）を正確に示す．注意すべきは，それが $t'_{\rm R} - t'_{\rm A}$（KS$'$ 時間）$= t_{\rm R} - t_{\rm A} = T_1$ であることを示していないことである．実際，(9.13) で導入された時間座標 $t'$ は，ロケットの軌道の異なった位置を区別するのに適しているけれども，それは軌道に沿った物理的な時間尺度ではない．これに類似して，角度 $\phi$ は座標として適しているが， $d\phi$ は 2 点 $(\rho,\,\phi,\,z)$ と $(\rho,\,\phi + d\phi,\,z)$ の間の距離ではない．次の関係

$$t = t'^2, \qquad x = x' + g\,t'^4/2 \quad (9.16)$$

によって，(9.13)とは異なった別の時間座標 $t'$ を取り入れることができる．そうすると(9.14)は，この $t'$ で固有時間が正確に計算できるように変わってしまう．同じように，たとえば円筒座標を採用して(9.2)を

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2\rho'^2)\,{\rm d}t'^2 - 2\omega\,\rho'^2\,d\phi'\,dt' - d\rho'^2 - \rho'^2 d\phi'^2 - dz'^2 \quad (9.17)$$

とすることも自由である．明らかに(9.17)と(9.2)の計量テンソルは同じ物理的な状況を表す．(9.17)に対して再度，回転系 KS$'$ に乗っている時計の固有時を計算しよう．その時計に対しては $d\rho' = 0$， $d\phi' = 0,\ dz' = 0$ が成り立つ．よって

$$d\tau = \left(\frac{ds}{c}\right)_{\rm clock} = \sqrt{g_{00}}\,dt' = \sqrt{1 - \frac{\omega^2\rho'^2}{c^2}}\,dt' \quad (9.18)$$

を得る．

この節の議論では次のことが示された．

1. 加速度系 KS′ では，線素は $ds^2 = g_{\mu\nu}(x')\,dx'^{\mu}\,dx'^{\nu}$ の形をとる．よって，定数であるミンコフスキー・テンソル $\eta_{\alpha\beta}$ の代わりに座標依存性のある計量テンソル $g_{\mu\nu}(x')$ が現れる．
2. KS′ の加速度運動は $g_{\mu\nu}$ を部分的に定める．変換(9.3)によって KS′ の原点が，与えられている速度 $v(t) = (dx/dt)_{x'=0}$ で動くように保証されなければならない．このことによって(9.3)が決まり，さらに(9.5)が決まる．
3. KS′ の計量テンソルは，前もって与えられている加速度によっては完全には決められない．任意の座標変換をどう取るかで $g_{\mu\nu}$ の事実上の形を変えてしまう．(9.2)と(9.17)とを比べて見よ．

   座標は自由に選ぶことができるので，（球対称の場合に球座標を使うように）それぞれの問題に合った座標を導入してよい．
4. 座標の意味は $ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu}$ からわかる．たとえば，$d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$ を使って長さを測るとすると，これから $\rho$ と $\phi$ の意味がはっきりする．

   座標点 $x^{\mu}$ にある時計の表示時刻の間隔は $d\tau = ds/c$ に等しい．特に系とともに動いている時計に対しては

$$d\tau = \left(\frac{ds}{c}\right)_{\text{clock}} = \sqrt{g_{00}}\; dt' \tag{9.19}$$

   が成り立つ．これによって時間座標 $x^0 = c\,t'$ の意味がはっきりする．
5. 回転系では $g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2$ が成り立つ．ここで $\Phi$ は遠心力ポテンシャルである．

5番目のコメントから，$g_{\mu\nu}$ は相対論的ポテンシャルと見なせるのではないかとの考えが浮かぶ．このことと，慣性力と重力の等価性（10節）とから，$g_{\mu\nu}(x)$ は**相対論的重力ポテンシャル**であるこということが出てくる．

## 演習

9.1: （$t$, $x$, $y$, $z$ をもつ）慣性系 IS で $\boldsymbol{r}_{\rm clock} = \boldsymbol{e}_x\, a \sin(\omega t)$ のように，その位置が振動している時計がある．ただし $a\omega \ll c$ とする．$t=0$ にこの時計の位置は慣性系 IS の時計（$\boldsymbol{r}=0$ に静止している時計）のそれと一致しているものとする．

半周期（$t = t_0 = \pi/\omega$）後に動いている時計は再び $\boldsymbol{r}=0$ にきて，そこに静止している時計と比べられる．慣性系 IS に静止している時計の表示 $\Delta t$ と動いている時計の表示 $\Delta t'$ を求めたい．まずそれぞれの時計が示す経過時間を慣性系 IS で計算せよ．それから動いている時計の系を静止系 KS′ にするような適当な変換を行い，この系で両方の時計の時刻を計算せよ．相対論効果をもっとも低いオーダーでそれぞれ与えよ．

# 10 等価原理

一般相対論の物理的な基礎は，アインシュタインが仮定した等価原理である[5]．この原理は，重力は慣性力と等価である，ということである．

まず，次の事項をくわしく説明することにしよう．

1. 重力質量と慣性質量とは等しい．
2. 重力は慣性力と等価である．
3. 局所慣性系（人工衛星内の実験室）では，重力を**含まない**よく知られた特殊相対論の法則が成り立つ．

第一の項目は等価原理に対する実験から得られた前提を述べている．第二の項目は等価原理の根幹をなす物理的な命題である．第三の項目は等価原理の定式化であり，われわれはさらなる発展（重力を含む相対論の法則の確立）のためにこの原理を必要とする．

**慣性質量** $m_{\rm i}$ はニュートンの第二法則，つまり(1.4)の左辺の $m$ である．重力は**重力質量** $m_{\rm g}$ に比例する．これは(1.4)の右辺の $m$ である．したがって，一様な重力場のなかでの垂直運動に対しては，(1.4)は $m_{\rm i}\,\ddot{z} = -m_{\rm g}\,g$ となる．この微分方程式の解

$$z(t) = -\frac{1}{2}\frac{m_{\rm g}}{m_{\rm i}}\,g\,t^2 \tag{10.1}$$

は自由落下を示す．ガリレイの命題“すべての物体は同じ速さで落下する”は，すべての物体に対して比 $m_{\rm g}/m_{\rm i}$ が等しいということを意味している．自由落下の代わりに振り子(長さ $\ell$ )の振動周期 $T$ を考えてみると，小さな偏角に対しては $(T/2\pi)^2 = (m_{\rm i}/m_{\rm g})(\ell/g)$ が成り立つ．ニュートンは，異なった物体が同じ周期 $T$ を与えることを精度 $10^{-3}$ で実験的に示した．エトベッシュ(Eötövs)は 1890 年に別の実験(ねじれ秤)を考案し，その改良型で 1922

[5]“等価原理”という術語をこれからはこの意味で使う．これとはまた別に，この術語は質量とエネルギーの同等性に対しても使われることがあるだろう．

年，ついに $5\times10^{-9}$ の精度で $m_{\mathrm{i}}/m_{\mathrm{g}}$ が等しいということを示した．現在の実験 [文献 9] では $4\times10^{-13}$ までの精度が達成されている．

慣性質量と重力質量とが互い比例しているとすると，単位を適当に定めればそれらを等しくすることができて $m_{\mathrm{i}}=m_{\mathrm{g}}$ となる．(1.2) に示されている重力定数に対しては $m_{\mathrm{g}}=m_{\mathrm{i}}$ であり，かつ $[m_{\mathrm{g}}]=[m_{\mathrm{i}}]=\mathrm{kg}$ とされている．

エネルギーと質量の同等性（4 節）により，すべての形のエネルギーは質量に寄与する．$m_{\mathrm{g}}=m_{\mathrm{i}}$ であるということは，どんな形のエネルギー $\Delta E$（たとえば電磁相互作用，または強い相互作用の寄与）でも $\Delta E/c^2$ の形で慣性質量と重力質量に寄与するということを示唆している．しかしすぐ前に述べた実験では，重力の結合エネルギーは何の役割もはたしていない．31 節で重力相互作用それ自身のエネルギー寄与（それは惑星に対しては一定の役割を演じる）は，等価原理を満たすかどうかという疑問に立ち戻ることにする．

重力質量と慣性質量が等しいとすると，重力は慣性力と等価である．このことは，重力場は加速された座標系 (KS) に移ることによって消すことができることを意味している．これを簡単な例で説明しよう．地表の一様な重力場では，質点に対するニュートンの運動方程式は

$$m_{\mathrm{t}}\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=m_{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{g} \tag{10.2}$$

となる．ここで $\boldsymbol{g}$ は一定の重力加速度である．この運動方程式は地表の静止系で成り立つ．今の目的に対しては，この静止系は十分によい近似で慣性系である．さて加速された座標系 KS への変換

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\frac{1}{2}\,\boldsymbol{g}\,t'^2,\qquad t=t' \tag{10.3}$$

を考えよう．座標系 KS の原点 $\boldsymbol{r}'=0$ は，慣性系 IS では $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}t^2/2$ で動いている．座標系 KS は "自由落下エレベーター" で実現することができる．変換 (10.3) を (10.2) に使うと

$$m_{\mathrm{t}}\,\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}=(m_{\mathrm{s}}-m_{\mathrm{t}})\,\boldsymbol{g}=0 \tag{10.4}$$

を得る．$m_{\mathrm{g}}=m_{\mathrm{i}}$ が成り立つとき，座標系 KS における結果の式は自由粒子に対する運動方程式である．よって慣性質量と重力質量とが等しければ重力

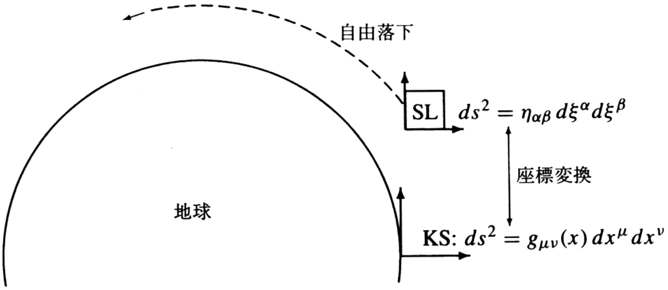



**図 10.1**: 等価原理によって，衛星実験室 SL では重力を含まない特殊相対論が成り立つ．これから他の座標系 KS （たとえば地球上の実験室）における重力を含んだ相対論の法則が得られる．その際，一般座標変換が使われる．

が消された座標系が実現できる．たとえば“自由落下エレベーター”基準系では利用者は重力を感じない．

アインシュタインはこの考察の結果を一般化することから出発した．彼の仮定は次のとおりである．自由落下の基準系 KS では，**すべて**の事象はあたかも重力が存在しないように進行する．この考察の結果は，力学の過程から**すべて**の物理的な（すべての時間，すべての場所での）過程に広げられた．さらに不均一な重力場にも広げられた．このように，一般化された等価原理をわれわれは**アインシュタインの等価原理**あるいは**強い**等価原理等価原理と呼ぶ．それに対して，前に述べた慣性質量と重力質量との同等性を**弱い**と呼ぶ．弱い等価原理からアインシュタインの等価原理が，矛盾のない重力理論によって導けるかどうかは学問上の議論の対象となっている．これ以降においては，等価原理と言うときにはつねにアインシュタインの等価原理を指す．

地球を周回している（自転していない）衛星実験室は自由落下系の一つである．衛星実験室は十分に小さいので，そのなかの重力場の不均一性は無視できる．衛星実験室からのテレビの映像には，まるで重力がないかのように力学的な事象が進んでいくのが生き生きと映し出される．そこでは自由物体は直線的に動く．等価原理では，衛星実験室では**すべて**の事象はあたかも重力場がないかのように進行すると仮定する．

衛星実験室において自由粒子が直線運動をするということは，そこでは**あ**

**たかも慣性系のなかであるかのように**事象は進行するということを表している．したがって，重力が感知されないこの局所基準系を**局所慣性系**と呼ぶ．**局所**とゴシック体で書いたのは，**局所慣性系は慣性系ではない**ということを強調するためである．衛星実験室は恒星天に対しては**加速されて**いるのである．‘局所慣性系’という概念の導入によって等価原理は次のようになる．

**等価原理**：

局所慣性系では特殊相対論の法則が成り立つ．

衛星実験室内の観測者は，特殊相対論の法則に従って物理的な事象が進んでいるということに気がつく．このとき重力は現れない．それに対して地球上の観測者は，衛星実験室の事象を違ったふうに見る．彼にとってみれば衛星実験室は重力場のなかで動いている．たとえば 200 km の高さでは，この場は地表よりもわずかに弱いだけである．実際，衛星実験室は加速されているからそこには慣性力が現れるが，その（自由落下）運動ではまさに（(10.4) の右辺のように）慣性力と重力とが相殺されている．

衛星実験室の重心では加速力と重力の相殺が正確に成り立っている．このようにして等価原理はこの**小さな**衛星実験室，すなわちまさに**局所**慣性系と結びつく．衛星実験室，または自由落下しているエレベーターの大きさは場が顕著に変わる長さ（地球半径）と比べれば小さいので，それらは地球の場にふさわしい局所慣性系である．宇宙の（たとえば多数の銀河の距離にわたって平均された）平均重力場を考えてみると，これに対する局所慣性系は対応した大きな広がり（たとえば $10^5$ 光年）になるであろう．

等価原理を使えば**重力を取り入れた相対論の法則**を確立することができる．そのために，衛星実験室における事象を正確に記述するよく知られた特殊相対論から出発する．われわれは別の基準系の座標系 KS，たとえば地球上の実験室（図 10.1）への座標変換をほどこす．すなわち，われわれは次の図式に従って考察を進める．

| 重力を含まない<br>特殊相対論の法則 | 座標変換<br>⟶ | 重力を含む<br>相対論の法則 |
|---|---|---|

座標変換には衛星実験室と座標系 KS との間の相対的な加速度が含まれており，それは重力場に対応する．変換は考えている法則に“痕跡”を残す．重力場を記述する数学的な形が，この痕跡によって決められる．これを説明するためにもう一度 $m_{\rm i} = m_{\rm g} = m$ と置いた(10.2)–(10.4)を例として考える．方程式(10.4)は自由落下エレベーターのなかでの直線運動を記述する（重力を含まない法則）．変換(10.3)はこれを(10.2)に導く．この変換の痕跡として(10.2)に力 $m\boldsymbol{g}$ が現れたのである．この変換の痕跡は(10.2)に力 $m\boldsymbol{g}$ を作り出すことになる．この単純な例とは対照的に，実際の場合（非一様な場の場合）座標変換による重力場の消去は**局所的**にのみ可能である．

## リーマン空間

われわれは局所慣性系，あるいは衛星実験室におけるミンコフスキー座標を $\xi^\alpha$ で表す．等価原理によって特殊相対論の法則がここでは適用でき，特に

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta \qquad \text{（局所慣性系，ミンコフスキー空間）} \tag{10.5}$$

が成り立つ．局所慣性系から $x^\mu$ をもつ座標系への移行は座標変換

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha\,(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3) \tag{10.6}$$

によってなされる．この変換を(10.5)に代入すると次の式

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad \text{（リーマン空間の座標系）}} \tag{10.7}$$

と計量テンソル

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \tag{10.8}$$

を得る．(10.7)で表される線素をもつ空間は**リーマン**(Riemann)**空間**と呼ばれる．便宜上，添字 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ をミンコフスキー空間で使い，$\kappa, \lambda, \mu, \nu, \cdots$ をリーマン空間で使うことにする．どちらの場合も添字は $0, 1, 2, 3$ を取る．

$g_{\mu\nu}$ は座標変換(10.6)から決められる．この変換は座標系 KS と局所慣性系 IS の間の相対加速度に依存する．この相対加速度は，異なった 2 箇所の局所慣性系に対してはそれぞれ異なる．よって

- 現実の重力場に対しては，(10.7)をミンコフスキーの形(10.5)にするような**大域的な**変換はない．

この命題は，(10.7)で記述される時空の**曲率**のことを言っているのと同じであることが18節で示される．逆にこのような大域的な変換があるときには，空間は平坦であるということが言える（線素(9.2)をもつ回転系の場合がそうである）．

等価原理によって重力場は，（すべての物理的な作用に対して）局所的に完全に消し去ることができる．これは同時に次のことを意味する．すなわち，考えているどんな地点でも局所慣性系に導くような一般座標変換があって，それによって重力場は完全に記述される．この変換は線素の中心的な量である計量テンソルを作る．よって，計量テンソルは重力場の相対論的記述を含んでいる．

11節でわかるように，$g_{\mu\nu}$ の導関数は相対論的運動方程式における重力を定める．したがって，$g_{\mu\nu}$ は**相対論的重力ポテンシャル**である．特に(9.7)

$$g_{00}(x) = 1 + \frac{2\,\Phi(x)}{c^2} \qquad (|\Phi| \ll c^2) \tag{10.9}$$

はニュートンの重力ポテンシャル $\Phi$ に対しても成り立つ．

等価原理から重力場における運動方程式が出てくる．しかしながら等価原理では，$g_{\mu\nu}(x)$ に対する方程式を定めることはできない．その方程式は重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ とその源の間の関係を記述するのであるが，特殊相対論にこの方程式に対応するものがないからである．

# 11 重力場中の運動

等価原理から重力場中の粒子に対する運動方程式が出てくる．重力は，計量テンソルの 1 階導関数に比例するクリストッフェル (Christoffel) 記号で記述される．粒子の速度が遅く，かつ重力場が静的で弱い場合はニュートンの極限が得られる．

## 運動方程式

等価原理に従えば，局所慣性系（衛星実験室）では特殊相対論の法則が成り立つ．そこでは，力が働いていない質点の運動は次の式

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2}=0 \tag{11.1}$$

で記述される．これは (4.4) から $f^\alpha=0$ かつ $u^\alpha=d\xi^\alpha/d\tau$ として求まる．ここで $\xi^\alpha=\xi^\alpha(\tau)$ は質点のミンコフスキー座標である．固有時 $\tau$ は

$$ds^2=c^2\,d\tau^2=\eta_{\alpha\beta}\,d\xi^\alpha\,d\xi^\beta \tag{11.2}$$

によって与えられる．(11.1) の積分は直線

$$\xi^\alpha=a^\alpha\,\tau+b^\alpha \tag{11.3}$$

を与える．等価原理によると，局所 IS では光（または光子）は直線運動をする．したがって，光子の軌道は (11.3) または (11.1) で記述できる．しかし光の波面に対しては $ds=c\,d\tau=0$ であるから，この場合はパラメター $\tau$ を固有時と考えてはいけない．このために

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2}=0 \qquad \text{(光子)} \tag{11.4}$$

と書いて $\lambda$ で軌道パラメターを表す．軌道曲線 $\xi^i(\lambda)$ は電磁波束の中心としてもよいし，または幾何光学における光線と解釈してもよい．どの場合でも重力場が顕著に変わる距離に比べて波長が十分小さいということが仮定されている．

今，座標 $x^\mu$ と計量 $g_{\mu\nu}(x)$ をもつ大域的な座標系 KS を考える．どのような場所 $x$ でも，局所的に，線素 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu\,dx^\nu$ は(11.2)の形にすることができる．すなわち，どのような時空の点 P に対しても $\xi^\alpha$ と $x^\mu$ の間に変換 $\xi^\alpha(x) = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ が存在する．この変換は各点で異なる．このことは，たとえば隣り合った衛星実験室に対しては明らかである．よって完全な表示は $\xi^\alpha_{\rm P}(x)$ でなければならない．これは，とりわけ $x^\mu$ から $\xi^\alpha$ への大域的な変換はないことを意味する．以降の式はある特定の点 P を含むその近傍に関連したものであり，したがってわれわれは，以後 $\xi_{\rm P}$ の P を省略する．

変換 $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$ を線素(11.2)に代入する．すると

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\,d\xi^\alpha\,d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\,dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \qquad (11.5)$$

となる．これから計量テンソル

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \qquad (11.6)$$

を得る．座標 $x^\mu$ をもつ座標系 KS は回転座標系であってもよい．そのときは $g_{\mu\nu}$ によって重力以外に遠心力やコリオリ力が記述されることになる．今考えている理論では，このような力はすべて同等である．

今，変換 $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$ を(11.1)に代入する．すると

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad (11.7)$$

を得る． $\partial x^\kappa/\partial\xi^\alpha$ を掛けることによって，この式を $d^2x^\kappa/d\tau^2$ について解くことができる．このとき

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\alpha} = \delta^\kappa_\mu \qquad (11.8)$$

を使う．これによって運動方程式

$$\boxed{\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad \text{重力場における運動方程式}} \qquad (11.9)$$

を得る．ここで

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{\partial\, x^{\kappa}}{\partial\, \xi^{\alpha}}\, \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial\, x^{\mu}\, \partial\, x^{\nu}} \tag{11.10}$$

である． $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ は**クリストッフェル記号**と呼ばれる．(11.9)が求める運動方程式であり，これは関数 $x^{\kappa}(\tau)$ に関する 2 階の微分方程式である． $x^{\kappa}(\tau)$ は $g_{\mu\nu}(x)$ をもつ座標系 KS，すなわち重力場を含む基準系における粒子の軌道を記述する．

(11.9)に質量 $m$ を掛けた方程式の右辺が重力を示す．これに関しては，たとえば(11.9) を(4.4)または(6.12)と比べてみよ．重力は重力場と物質（ここでは粒子）の間の結びつきを示す．方程式(11.9)は等価原理から導き出された．このように等価原理は重力場と物質間の結びつきを定めるのである．

速度 $d\,x^{\mu}/d\,\tau$ は(11.5)から出てくる付加条件

$$c^2 = g_{\mu\nu}\, \frac{d\, x^{\mu}}{d\, \tau}\, \frac{d\, x^{\nu}}{d\, \tau} \qquad (m \neq 0) \tag{11.11}$$

を満たさなければならない．その際，われわれは $d\tau \neq 0$ と $m \neq 0$ を仮定している． (11.11)のために， $d\,x^{\mu}/d\,\tau$ の 4 成分のうち独立な成分は三つだけになる．われわれはすでに特殊相対論の四つの速度 $u^{\alpha} = d\,\xi^{\alpha}/d\,\tau$ についてこの制限があるのを知っており，(4.9)で見るように一つの速度成分は他の三つの $v^i$ をもって表すことができた．

粒子の運動方程式からの類推で，光子に対しては(11.4)から次の式

$$\frac{d^2\, x^{\kappa}}{d\, \lambda^2} = -\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\, \frac{d\, x^{\mu}}{d\, \lambda}\, \frac{d\, x^{\nu}}{d\, \lambda} \tag{11.12}$$

が導出される．一方，$d\tau = 0$ のために(11.11)は

$$0 = g_{\mu\nu}\, \frac{d\, x^{\mu}}{d\, \lambda}\, \frac{d\, x^{\nu}}{d\, \lambda} \qquad (m = 0) \tag{11.13}$$

と置き換えられる．

## クリストッフェル記号

(11.6)と(11.10)，すなわち

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\, \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}, \qquad \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{\partial\, x^{\kappa}}{\partial\, \xi^{\alpha}}\, \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial\, x^{\mu}\, \partial\, x^{\nu}} \tag{11.14}$$

の比較から，計量テンソルの1階導関数でクリストッフェル記号が表されるのではないかと推測される．そこで次の1階導関数の組合せを考えてみよう．

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}$$

$$+\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda}$$

$$-\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = 2\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \tag{11.15}$$

真ん中の式では2番目の項と6番目の項とが，同様に4番目の項と5番目の項とが打ち消し合う（$\alpha$ と $\beta$ とは互いに入れ替えられ，さらに偏微分は互いに交換できる）．最初と3番目の項は等しいので，結局，最後の右辺の結果となる．

一方(11.14)から

$$g_{\nu\sigma}\,\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu}\underbrace{\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\gamma}}_{=\delta^\beta_\gamma}\frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu}\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}$$

$$\overset{(11.15)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right) \tag{11.16}$$

を得る．ここで$(g_{\mu\nu})$の逆行列を$(g^{\mu\nu})$として導入する．

$$g^{\kappa\nu}\,g_{\nu\sigma} = \delta^\kappa_\sigma \tag{11.17}$$

これを使って(11.16)を解くと，クリストッフェル記号は次のようになる．

$$\boxed{\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \frac{g^{\kappa\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)} \tag{11.18}$$

クリストッフェル記号は下付きの二重添字に関して対称である．

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} \tag{11.19}$$

(11.9)の右辺の重力はポテンシャル $g_{\mu\nu}$ の導関数として与えられている．電磁場中の粒子の運動方程式(6.12)と(11.9)との比較から，$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は場 $F^{\alpha\beta}$ に，$g_{\mu\nu}$ は電磁場ポテンシャル $A^{\alpha}$ に対応していることがわかる

## ニュートン極限

ニュートン理論では，重力場中の粒子の運動方程式は $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -m\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$，または

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \tag{11.20}$$

である．以下で，速度が遅く静的で弱い場の極限では，相対論的運動方程式(11.9)は (11.20)になるということを示す．

計量テンソルを

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{11.21}$$

の形に書く．**弱い場**という仮定は

$$|h_{\mu\nu}| = |g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{11.22}$$

を意味する．わずかなずれを別にすれば，これによって座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x^i)$ は通常の意味をもつ．すなわち，それらは準ミンコフスキー座標である．よって $v^i = dx^i/dt$ は粒子の速度成分である．**遅い速度**

$$v^i \ll c \qquad \text{または} \qquad \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} \tag{11.23}$$

に対しては(11.9)から

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \approx -\Gamma^\kappa_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 \tag{11.24}$$

が出る．**静的な場**に対して必要なクリストッフェル記号を見積もると

$$(\Gamma^\kappa_{00}) = \left(-\frac{g^{\kappa i}}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\right) \approx \left(-\frac{\eta^{\kappa i}}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\right) = \left(0,\ \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\right) \tag{11.25}$$

となる．ここでは，小さな量である $h_{\mu\nu}$ の最低次の量のみを取り上げた．$\Gamma^\kappa_{00}$ を(11.24) に代入すると

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \qquad \text{そして} \qquad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \tag{11.26}$$

を得る．これは $dt/d\tau =$const. を与え，したがって

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \tag{11.27}$$

となる．$h_{00} = 2\Phi/c^2$ とすれば，これはニュートン極限 (11.20) と一致し，

$$\boxed{g_{00}(\boldsymbol{r}) = 1 + \frac{2\Phi(\boldsymbol{r})}{c^2} \qquad \left(|\Phi|/c^2 \ll 1\right)} \tag{11.28}$$

となる．その他の $h_{\mu\nu}$ に関してはここでは何も触れない．静的な弱い場に対しては，$h_{ii}$ は $(\Phi/c^2)$ のオーダーであるということ，および非対角成分はないということを後ほど示すことにする．

相対論的ポテンシャルに対する初等的な議論から，関係式(11.28)はすでに(9.7)で求められている．今の導出ではニュートンの重力ポテンシャルが直接使われている．

数値 $2|\Phi|/c^2$ は重力場の絶対強度を与える．それはミンコフスキー計量からのずれを決め，またニュートンの重力理論に対する一般相対論的補正を決める．われわれはいくつかの場合にこの量を評価してみることにする．

静的な弱い場の極限ではニュートンの場の方程式(1.5)が成り立つ．球対称な質量分布に対しては，その解は

$$\Phi(r) = -\frac{G\,M}{r} \qquad (r > R) \tag{11.29}$$

である．ここで $M$ は全質量，$r$ は中心からの距離であり，そして質量は半径 $R$ の内側に存在している．

まず最初に，質量 $M_{\mathrm{E}}$，半径 $R_{\mathrm{E}}$ =6 400 km の地球を考える．地表では，重力場は加速度 $g = G\,M_{\mathrm{E}}/R_{\mathrm{E}} \approx$10 m/s$^2$ を生む．よってわれわれは，重力場の絶対強度とし

$$\frac{|\Phi(R_{\mathrm{E}})|}{c^2} = -\frac{G\,M_{\mathrm{E}}}{c^2\,R_{\mathrm{E}}} = \frac{g\,R_{\mathrm{E}}}{c^2} \approx 7\times 10^{-10} \qquad \text{(地球)} \tag{11.30}$$

を得る．これをいくつかのタイプの星の表面のポテンシャル強度と比べてみる．

$$\frac{2\,|\Phi|}{c^2} \approx \begin{cases} 1.4\times 10^{-9} & \text{地球} \\ 4\times 10^{-6} & \text{太陽} \\ \sim 3\times 10^{-4} & \text{白色矮星} \\ \sim 3\times 10^{-1} & \text{中性子星（パルサー）} \end{cases} \tag{11.31}$$

次に考えられる星のタイプはブラックホールであろう．しかしこれに対しては相対論効果は非常に強くて，その効果は単なる補正として取り扱うことはできない．

## 演習

11.1: 次の空間に対してクリストッフェル記号を計算せよ[6]．

(a) 球座標で張った $R^3$．

(b) 円柱座標で張った $R^3$．

(c) 線素 $ds^2 = a^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$ をもつ球面．

11.2: 一定角速度で回転している系の $g_{\mu\nu}$ に対してニュートン極限で運動方程式 $d^2x^\kappa/d\tau^2 = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\,(dx^\mu/d\tau)\,(dx^\nu/d\tau)$ を吟味せよ．結果の運動方程式で遠心力とコリオリ力を確認せよ．

[6] 訳注：$R^3$ は 3 次元ユークリッド空間の意．

# 12　重力赤方偏移

静的な重力場中の時計の進み方を調べよう．特別な時計として，決まった振動数の光子を放射する原子を考える．場の外にいる観測者にはより小さい振動数の光子がやってくる．可視領域のスペクトル線がスペクトルの赤方端方向にずれるので，この効果は重力赤方偏移と呼ばれる．

## 固有時

ある時計の線素 $ds_{\text{clock}} = c\,d\tau$ はその時計の読みを決める．重力場中の時計の固有時 $\tau$ は

$$\boxed{d\tau = \frac{ds_{\text{clock}}}{c} = \frac{1}{c}\left(\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\,dx^{\mu}\,dx^{\nu}}\right)_{\text{clock}}} \tag{12.1}$$

で与えられる．ここで，$x = (x^{\mu})$ と $dx^{\mu}$ は時計の座標である．座標変換をすると右辺の具体的な表現は変わるが $\mathrm{d}\tau$ の値は変わらない．われわれは座標系 KS の時間座標をいつも $x^0 = ct$ のように書く．時間座標 $t$ と時計の読み $\tau$ の間の関係は(12.1)からわかる．

一般に時計の読みは重力場，時計の運動の双方から影響を受ける．重力場は $g_{\mu\nu}(x)$ で記述される．これに対して，座標系 KS にある時計の運動は $dx^i$ から決まる．ここで二つの簡単な場合を考えよう．

1. 重力場はないとし，考えている座標系 KS は慣性系 IS であるとする．よって，われわれはミンコフスキー座標を使うことができ，$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ となる．運動している時計に対して，(12.1)で $dx^i = v^i\,dt$ および $dx^0 = c\,dt$ と置く．すると

$$d\tau = \frac{1}{c}\left(\sqrt{\eta_{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu}}\right)_{\text{clock}} = \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}\;dt \qquad \text{(運動している時計，重力場なし)} \tag{12.2}$$

を得る．よって，座標 $t$ は静止している時計の読みと等しく，したがって慣性系 IS の時間と等しい．(12.2)によれば，動いている時計の読み

は止まっている時計の読みと比べて**ゆっくり**進む．この結果は相対論的**時間遅れ**として3節で知られていることである．

2. 静止している$(d\,x^i = 0)$時計に対して(12.1)は

$$d\tau = \sqrt{g_{00}(x)}\; dt \qquad \text{(重力場で静止している時計)} \tag{12.3}$$

となる．静的な弱い場に対し，われわれは(11.28)を使って

$$d\tau = \sqrt{1 + \frac{2\,\Phi(\boldsymbol{r})}{c^2}}\; dt \qquad \left(\text{静止している時計，}|\Phi| \ll c^2\right) \tag{12.4}$$

を得る．そして座標 $t$ は無限のかなたに静止している時計が示す読みである$(\Phi \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0)$．重力場にある時計の読みはこれに対して**ゆっくり**進む．というのは，重力ポテンシャル $\Phi$ が負だからである．たとえば(11.29)を見よ．

これらの二つの効果は一般に一緒に起こる．以下では2番目の効果だけを調べる．

## 赤方偏移

時刻を比較するにあたってそれぞれの時計は，同じ条件では同じ早さで時を刻むように調整されているものとする．たとえば，工業的に製作された時計ではこのことは可能であって，あるわかっている誤差の範囲で同じ早さで動く．特に，特定の振動数の光を出したり吸収したりする原子は時計とみなすことができる．固有振動数の最小ずれ幅(これは原子時計の不正確さの程度)は自然幅で与えられる．離散的な固有振動数は，たとえば，太陽や星の光のスペクトル線として観測される．

静的な重力場を考える．この場合，重力ポテンシャル $g_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})$ は場所だけに依存し，時間には依存しない．いま，$\boldsymbol{r}_{\rm A}$ に静止している源が単色電磁波を送り出しているものとする．この波は $\boldsymbol{r}_{\rm B}$ に静止している受信者に受信されるものとする．源と観測者の傍で静止しているそれぞれの時計は固有時

$$d\tau_{\rm A} = \sqrt{g_{00}(\boldsymbol{r}_{\rm A})}\, dt_{\rm A}, \qquad d\tau_{\rm B} = \sqrt{g_{00}(\boldsymbol{r}_{\rm B})}\, dt_{\rm B} \tag{12.5}$$

を示す．時間間隔（$d\tau_{\mathrm{A}}$ または $d\tau_{\mathrm{B}}$）として隣り合った波の山の間の時間差を考える．そして，その二つの波の山は A 点を通り過ぎたか，または B 点に着いたものとする．よって $d\tau_{\mathrm{A}}$ と $d\tau_{\mathrm{B}}$ とは，A 点と B 点とにおける電磁波の振動の周期に等しい．すなわち振動数の逆数に等しい．

$$d\tau_{\mathrm{A}} = \frac{1}{\nu_{\mathrm{A}}}, \qquad d\tau_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\nu_{\mathrm{B}}} \tag{12.6}$$

A から B に達するためには，最初の波の山と第二の波の山とは座標系 KS 時間で同じ $\Delta t$ を要する．というのは，同じ道のりを問題としており，さらに重力場と計量テンソルは時間に依存していないからである．よって両方の波の山は送り出された時間間隔（座標系 KS の時間）で到着する．すなわち

$$dt_{\mathrm{B}} = dt_{\mathrm{A}} \tag{12.7}$$

(12.5)-(12.7) から $\nu_{\mathrm{A}}/\nu_{\mathrm{B}} = \sqrt{g_{00}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}})/g_{00}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}})}$ が出る．通常，周波数の変化は次元のない量

$$z = \frac{\nu_{\mathrm{A}}}{\nu_{\mathrm{B}}} - 1 = \frac{\lambda_{\mathrm{B}}}{\lambda_{\mathrm{A}}} - 1 \tag{12.8}$$

で表される．$z$ という量は **赤方偏移**または赤方偏移パラメターと呼ばれる．可視光のスペクトルで赤方端への偏移は $\lambda_{\mathrm{B}} > \lambda_{\mathrm{A}}$ を，すなわち $z > 0$ を意味する．われわれは，可視光以外の領域でも $z > 0$ が成り立つときは赤方偏移という言葉を使う．

(12.5)-(12.8) から

$$\boxed{z = \sqrt{\frac{g_{00}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}})}{g_{00}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}})}} - 1 \qquad \text{重力赤方偏移}} \tag{12.9}$$

が出る．$g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2$ と表せる弱い場ではこの式から

$$z = \frac{\Phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}) - \Phi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}})}{c^2} \qquad \left(|\Phi| \ll c^2\right) \tag{12.10}$$

を得る．決まった固有振動数をもつ原子が源としてよく取り上げられるが，これらの原子は光子を放出したり吸収したりできる．そして上で仮定された

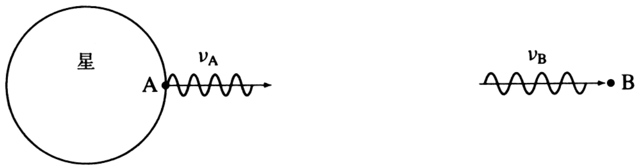



**図 12.1**: 星(A)の表面から周波数 $\nu_A$ の光が送り出されている．重力場の外の B 点でこの光は振動数 $\nu_B < \nu_A$ で受信される．すなわち，それは赤方偏移している．

単色波は，これらの光子を表す波束に対する近似である．固有振動数はスペクトル線として観測される．スペクトル線の特徴的なパターンは，特定の原子の位置づけや振動数シフトの決定に使われる．

一般にスペクトル線の振動数のずれを引き起こす効果は三つある．

1. 源の運動に基づく**ドップラー・シフト**（演習 6.2）．
2. 源のある場所の重力場に基づく**重力赤方偏移**（図 12.1）．
3. 宇宙の膨張に基づく**宇宙赤方偏移**（50 節）．この場合，計量テンソルは時間に依存する．

(12.9)の導出の際には，源と受信者は静止しており（(12.5)に対する前提），かつ重力場は静的である（$g_{00}$ の時間依存性なしの前提と(12.7)に対する前提）とされていた．これらによって 1 と 3 の効果は取り除かれていた．

## 重力場中の光子

1 個だけの光子，すなわちエネルギー $E_\gamma = \hbar\omega = 2\pi\,\hbar\nu$ をもつ電磁場の量子について議論する．(12.10)は重力場中を A から B まで走る光子の振動数変化を示す．特に，光子が一様な地球の場を距離 $h = h_B - h_A > 0$ だけ上のほうへ飛んでいくとき

$$z = \frac{\nu_A}{\nu_B} - 1 = \frac{\Phi(\boldsymbol{r}_B) - \Phi(\boldsymbol{r}_A)}{c^2} = \frac{g\,(h_B - h_A)}{c^2} = \frac{g\,h}{c^2} \tag{12.11}$$

が成り立つ．振動数の変化 $\Delta\nu = \nu_B - \nu_A$ の割合は

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{g\,h}{c^2} \tag{12.12}$$

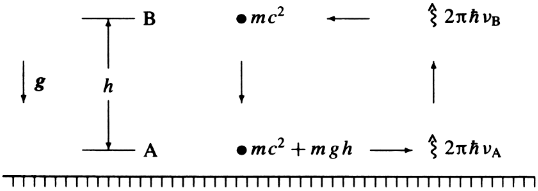



**図 12.2**: 地球($g \approx 10$ m/s$^2$)の重力場における赤方偏移を導き出すために次の過程を考える．静止していた物質粒子（エネルギー $mc^2$）が B から A に落下し，エネルギー $mc^2 + mgh$ を得る．それは，そこで 1 個の光子（周波数 $\nu_A$）に変えられる．その光子は上方へ距離 $h$ だけ飛び，周波数 $\nu_B$ となる．それはそこで静止した物質粒子に変えられる．

である．すなわち，光子が重力に逆らって（上方に）進むと，そのエネルギーは $\Delta E_\gamma = -(E_\gamma / c^2)\, gh$ だけ変わる．これは重力場のなかを走っている質量 $E_\gamma/c^2$ の粒子の運動エネルギーの減少に対応する．

(12.12)の結果は，エネルギー保存則とエネルギーと質量の同等性から導くことができる．図 12.2 に描かれている過程を考えよう．質量 $m$ の粒子がまず B に静止しており，したがってそのエネルギーは $mc^2$ である．その粒子は今 B から A に落ちるとする．するとそのエネルギーは $mc^2 + mgh$ に増大する．A 点でその粒子はエネルギー $2\pi\hbar\nu_A$ の光子に変わるものとする．その後，光子は B に上昇するものとする．そこでは今のところ不明の振動数 $\nu_B$ とエネルギー $2\pi\hbar\nu_B$ をもつ．それは静止した物質の粒子に変えられるものとする．最終状態は初期状態に等しいので（そしてエネルギーは供給されてないので）次の関係式

$$2\pi\hbar\nu_A = mc^2 + mgh \qquad \text{そして} \qquad 2\pi\hbar\nu_B = mc^2 \tag{12.13}$$

が成り立たなければならない．これから(12.12)が出る．

## メスバウアー効果

特定の核遷移によって発生する高エネルギー光が同種の核に再び吸収されるとき，これを共鳴蛍光という．放射される $\gamma$-線のエネルギーは放射した核子が必ず受ける反跳のために変化する．このために，通常，共鳴蛍光は起こ

りにくい．ところが低温の結晶では，いまの反跳は結晶全体で受けとめられる．他の言い方をすれば，$\gamma$-光子の放出の際にはフォノンは有限の確率では励起されない．この無反跳共鳴蛍光，すなわち**メスバウアー**(Mößbauer)**効果**の際には非常に鋭い $\gamma$-線の線スペクトルが現れるが，このスペクトルはただ励起核の寿命による自然幅をもっているだけである．

パウンド(Pound)とスナイダー(Snider)[7]は，メスバウアー効果を使って地球重力場での振動数偏移(12.12)を計測した．実験では，線源と観測器とは上下に $h = 22.6$ m だけ離された．したがって

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_A} = -\frac{gh}{c^2} \overset{h=22.6\mathrm{m}}{=} -2.46 \times 10^{-15} \qquad (12.14)$$

となる．考えている遷移($^{57}$Fe での $E_\gamma = 14.4$ keV)の自然幅 $\Gamma$ は少なくとも $\Gamma/\nu \approx 10^{-12}$ であるので，非常に小さいずれ(12.14)を計測するためには特別な実験的技巧が必要とされた．実験の解析から

$$\frac{(\Delta\nu)_{\mathrm{exp}}}{(\Delta\nu)_{\mathrm{theor}}} = 1.00 \pm 0.01 \qquad \text{(メスバウアー効果)} \qquad (12.15)$$

が得られた．

## 太陽光

重力赤方偏移は，狭い意味では星の表面からわれわれに届く光の赤方偏移である．太陽の表面($\boldsymbol{r}_A$)から送り出される振動数 $\nu_A$ の光子を考えよう．図12.1を見よ．それは地球($\boldsymbol{r}_B$)に**より小さい**振動数 $\nu_B$ になって届く．(12.10)によって

$$z = \frac{\Phi(\boldsymbol{r}_B) - \Phi(\boldsymbol{r}_A)}{c^2} \approx -\frac{\Phi(\boldsymbol{r}_A)}{c^2} = \frac{G M_\odot}{c^2 R_\odot} \approx 2 \times 10^{-6} \qquad (12.16)$$

が成り立つ．ここで $|\Phi(\boldsymbol{r}_B)| \ll |\Phi(\boldsymbol{r}_A)|$，$M_\odot = 2 \times 10^{33}$ g，$R_\odot = 7 \times 10^5$ km を使った．

太陽表面のプラズマは連続スペクトル（プランク(Planck)の放射スペクトル）を放射する．やや冷えた太陽雰囲気の層で，このスペクトルから不連続

[7] R.V.Pound and J.L.Snider, Phys. Rev. 140 B (1965) 778.

な振動数が吸収される．このため吸収線（フラウンホーファー(Fraunhofer)線）が生じる．この不連続線をもったスペクトルは(12.16)に従ってずれる．この吸収線をよく知られた原子遷移と引き比べることで，このずれは定量的に定められる．

観測された太陽スペクトルから赤方偏移を決定するのは，次のいくつかの効果のために実際は困難である．

- 地球と太陽の相対速度
- 原子の熱運動
- 太陽気体の対流

最初の効果は比較的小さいと見なしてよい．2番目の効果はスペクトル線の著しい広がりをもたらす．すなわち, $T \approx 6\,000$ K の太陽表面温度で, 炭素原子または酸素原子の熱速度は $v \sim 3$ km/s となる．しかし, $v = 2\times10^{-6}c = 0.6$ km/s だけの原子同士の相対運動でさえも(12.16) の大きさのドップラー・シフトをもたらす．3番目の効果がもっとも妨げになる．というのは，それはやはり相対的に大きいし，また統計的な変動を受ける．

これらの困難にもかかわらず, 観測された太陽光の周波数偏移の解析[8]から

$$\frac{(\Delta\nu)_{\rm exp}}{(\Delta\nu)_{\rm theor}} = 1.01 \pm 0.06 \qquad \text{(太陽光)} \tag{12.17}$$

が得られた．

## 運動している時計

これまでわれわれは, 重力場に静止している時計を考えてきた．重力場 $g_{\mu\nu}$ 中で運動している時計に対しては時計の速度を(12.1)に代入することで，時計の読みと基準系 KS の時間との関係が出る．これによって問題になっているすべての時計の比較が可能となる．

例として地上に静止している時計と, 地球周回の人工衛星に乗せてある同種類の時計とを考える．地上の時計と比較して衛星の時計は

[8] L. Snider, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 853.

(i) そこの重力が弱いから**早く進む**.

(ii) 衛星の速度が大きいから**ゆっくり進む**.

現代の全地球無線測位システム(GPS)は両方の効果を考慮しなければならない[9]. すべての効果を計算するために太陽を回る地球の軌道運動速度が, ある瞬間（実際には数週間ならばよい近似と言われている）消えるような慣性系 IS を考える. この慣性系 IS では地球の自転から地球上の時計に速度が現れ, 旋回速度から衛星上の時計に速度が生じる. 地球に近い衛星では(ii)の効果が優勢であり, 地球に遠い衛星ではそれに反して(i)が優勢である.

航空機やロケット, 衛星に載せた時計に関する実験では, (12.1)から帰結される理論的な予測が確認されている. ロケットに載せた時計（水素メーザー）に対して, $2 \times 10^{-4}$ の精度で理論との一致が達成されている [文献 9].

重力赤方偏移の取り扱いはアインシュタインの等価原理に基づいている. よって, ここで議論した実験は等価原理の検証実験である. しかしそれらの実験では, 一般相対論の場の方程式は何の役割も果たしていない.

## 演習

12.1 衛星（質量 $m$）が重力ポテンシャル

$$V(r) = -\frac{G\,M_{\rm E}\,m}{r} = m\,\Phi(r) \tag{12.18}$$

のなかで円軌道（半径 $r_0$）を描いて運動している. ここで $G$ は重力定数で, $M_{\rm E}$ は地球の質量である. 衛星内の時計が時刻 $t_{\rm S}$ を示している. $t=\infty$ にある時計は時刻 $t_\infty$ を示している. 相対論的時間遅れに基づいて時間の差を $t_{\rm S}/t_\infty = 1+\delta$ の形で $v/c$ の最低次のオーダーで定めよ. $\delta$ を $\Phi(r_0)$ を使って書くこと.

さらに重力場が時計の進み方に影響を与える.

$$\frac{t_{\rm S}}{t_\infty} = 1 + \delta + \frac{\Phi(r_0)}{c^2} \tag{12.19}$$

[9] E. W. Grafarend and V. S. Schwarze, *Das Global Positioning System*（全地球無線測位システム）, Physik Journal 1 (2002) 39.

地表面の実験室の時計は時刻 $t_{\mathrm{L}} \approx t_{\infty}(1+\Phi(r_0)/c^2)$ を示す．このときは地球の回転に基づく速度は無視できる．実験室と衛星の相対的な時間の差 $(t_{\mathrm{L}}-t_{\mathrm{S}})/t_{\mathrm{L}}$ を $\Phi/c^2 \ll 1$ に対して $r_0/R$ の関数として定めよ．これらの効果はどのくらいのオーダーと符号を地球に近い衛星と静止衛星に対して持つであろうか？

# 13 幾何学的な見方

重力場を幾何学的に表す方法を計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を介して議論する．$g_{\mu\nu}(x)$ が座標に依存しているということは，線素 $ds^2$ によって定義される空間は曲がっているということを一般に意味する．そして重力場の粒子の軌道は空間の測地線である．

## 空間の曲がり

座標 $x = (x^1,\, x^2,\, \ldots,\, x^N)$ をもつ $N$ 次元リーマン空間の線素は

$$ds^2 = g_{ik}(x)\, dx^i\, dx^k \tag{13.1}$$

である．この曲がった空間の特性は IV 章で数式的に調べられる．定性的かつ直観的な議論のために 2 次元

$$ds^2 = g_{11}(x^1,\, x^2)\,\bigl(dx^1\bigr)^2 + 2\, g_{12}(x^1,\, x^2)\, dx^1\, dx^2 + g_{22}(x^1,\, x^2)\,\bigl(dx^2\bigr)^2 \tag{13.2}$$

の場合に話を限ることにする．よく知られた例はデカルト座標 $(x^1,\, x^2) = (x,\, y)$ をもつ平面

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{13.3}$$

または(2 次元)極座標 $(x^1,\, x^2) = (\rho,\, \phi)$ をもつ平面

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\phi^2 \tag{13.4}$$

または角座標 $(x^1,\, x^2) = (\theta,\, \phi)$ をもつ球面

$$ds^2 = a^2\Bigl(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\Bigr) \tag{13.5}$$

である．(13.4) は座標変換によって (13.3) の形にもっていけるのは明らかである．しかしこれからの議論で示すように，(13.5) をデカルト型 (13.3) にもっていける座標変換はない．これは次の一般的に確定されている事項の簡単な例である．

- 計量テンソルは空間の特性を決める．特に曲がりはその特性の一つである．
- 計量テンソルの形は空間の性質から一意的に決められるというものではない．与えられた空間で別の座標系を選べばその形を変えることができる．

今から(13.2)の $g_{ij}$ がどのように 2 次元空間の曲がりを定めるかを示す．このために，3 次元空間のある点のまわりに 2 次元の面を張る [文献 2]．一つの点からの微小な広がり $\delta x^1, \delta x^2$ で面ができる．$g_{ij}$ は $\delta x^1, \delta x^2$ の座標の変化によって，ごくわずかに変わるであろう．以下では $\delta x^1 = \delta x^2 = 1$ とおくことにする．

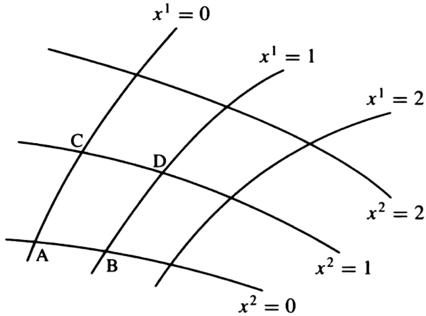



**図 13.1**: 与えられた $g_{ij}(x^1, x^2)$ から 2 次元の空間を構成する．

われわれは 3 次元空間のある点 A をこの面の座標原点 $x^1 = x^2 = 0$ に選ぶ．そして座標の線 “$x^1 = 0$” と “$x^2 = 0$” とを示す 2 本の線を，点 A を通るように引く（図 13.1）．“$x^2 = 0$” の線上に間隔

$$\delta s_{\mathrm{AB}} = \sqrt{g_{11}(0,0)}\,\delta x^1 = \sqrt{g_{11}(0,0)} \tag{13.6}$$

をとって線 “$x^1 = 1$” を交叉させる（B 点）．すべての距離 $\delta s$ は物理的な距離であり，したがって線の長さである．線 “$x^1 = 0$” のうえに間隔

$$\delta s_{\mathrm{AC}} = \sqrt{g_{22}(0,0)}\,\delta x^2 = \sqrt{g_{22}(0,0)} \tag{13.7}$$

をとって，線 "$x^2 = 1$" を交叉させる（C 点）．2 本の新しい線は，距離 $\sqrt{g_{22}(1,0)}$ と距離 $\sqrt{g_{11}(0,1)}$ をおいて D 点で交叉する．このようにして，4 辺形 ABCD の各辺の長さは確定する．対角の距離

$$\delta s_{\mathrm{AD}} = \sqrt{g_{11}(0,0) + 2\,g_{12}(0,0) + g_{22}(0,0)} \tag{13.8}$$

はこの 4 辺形を**平らな**パッチとみなして決められる．同じように，辺 $\overline{\mathrm{BD}}$ と辺 $\overline{\mathrm{CD}}$ とに境を接している 4 辺形が作られる．今や D 点を頂点とする四つの 4 辺形のうち三つの 4 辺形が一つの平面上にできた．そして，残りの一つの 4 辺形に対しては D 点での角度が定まるであろう．しかし，この 4 番目の四辺形はそれ自身計量係数 $g_{ik}$ から決められる．もし辺 $\overline{\mathrm{BD}}$ と辺 $\overline{\mathrm{CD}}$ を折り曲げるならば，計量から求めた四辺形を D を頂点にして貼りつけることは可能である．しかしこの場合，一般に表面は平らでなくなり曲がってしまう．この曲率は $g_{ik}$ で決められる．計量(13.5)に対して，このようなやり方で球面を構成することができる．この場合, たとえば赤道から始めて，経線と緯線とで区切られた台形をくっつけてゆくことになろう．

さらに 4 辺形を加える際に，新しい 4 辺形の間に亀裂が生じないよう，関係している稜に沿って折り曲げられるかどうかは保証のかぎりではない．もしこの構築が裂け目なしにつづけられるのであれば，直感的にわかりやすい面が得られる．われわれはそれを，面は 3 次元空間に埋め込まれていると言う．このような埋め込みが不可能な面の例は**疑球面**であり，それは線素 $ds^2 = a^2\,(d\theta^2 + \sinh^2\theta\, d\phi^2)$ で定義される．この面はどの点でも一定のガウス曲率 $K = -1/a^2$ をもっている[10]．このような面は普通の 3 次元空間に思い描くことはできない．しかしある点の近傍で，疑球面は双曲面（すなわち，3 次元空間における面）で近似できる．このかぎりにおいて，（局所的な）曲がりは目に見えるようにすることができる．

ここまでに議論された曲がり[11]に加えて，さらに**外的な**曲がりが存在する．テーブルのうえに置かれている一枚の紙を考えよう．それは平らな面になり，そのうえにデカルト座標を書くことができる．紙を（たとえば円筒に）曲げ

[10] 訳注：ガウス曲率 $=1/(\rho_1\rho_2)$．ここで $\rho_1$，$\rho_2$ は主曲率半径である．(18.28)参照．

[11] 訳注：内的な曲がりまたはガウス曲率．面の正確な形状を知らなくても，考えている点を取り囲む閉曲線とそれが囲む面積を知ることでその点の（ガウス）曲率がわかる．

ても面の**内側**の距離は変わらず，計量は等しいままである．このような面の曲がりを示す曲率を**外的な**曲率と呼ぶ[12)]．以下では，面内の計量から生じる**内的な**曲がりのみを考える．

(13.2)に座標変換 $(x'^i = x'^i(x^1, x^2))$ を行えば別の関数 $g_{ik}(x)$ を得るけれど，別の面を得るわけではない．このことは，面の構成は変換によっては変わらない物理的な長さ $ds$ （(13.6)-(13.8)を見よ）に基づいているということを意味している．座標変換によって単に同じ面の点に別の名前（＝座標の値）がついただけである．われわれは，座標変換 $x = \rho\cos\phi$ と $y = \rho\sin\phi$ により(13.3)から(13.4)を得るが，両方の $ds$ の形は一つの平らな面を記述している．また，(13.5)に別の座標を導入しようとすればできる．しかしデカルト座標への変換はできない．

デカルト座標が使えるとき，その空間は曲がっていない（または平坦，または**ユークリッド**(Euclid)的である）．すなわち

$$\text{デカルト座標が可能} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{空間は曲がっていない} \tag{13.9}$$

これを説明しよう．われわれがデカルト座標から出発すると，上で与えられた構造[13)]は，ある平面上で互いに継ぎ合わせることができるまったく等しいいくつかの正方形になる．逆に平面から出発すると等間隔の直線をえることができ，それぞれに $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ などと名前をつけることができる．つづいて，それらに垂直な線を $y = 0$ と名づけることができ，そしてそれに平行な直線も $y = \pm 1$, $y = \pm 2$ などと名づけることができる．このようにしてわれわれはデカルト座標を導入してきた．この議論はより高い次元にも当てはめることができる．

(13.9)の命題から，曲がった空間ではデカルト座標は使えないということが出てくる．特にこのことは(13.5)で定義される球面に当てはまる．しかしながら，ある与えられた線素 $ds^2 = g_{ik}(x)\,dx^i\,dx^k$ に対してデカルト座標を張ることができないということを，試行的な座標変換を使って証明できることはめったにない．そのことよりも，与えられた $g_{ik}$ から空間の曲がりを実

[12)] 訳注：外的な曲率 $=1/\rho_1 + 1/\rho_2$．今の場合，内的な曲率はゼロであるが，外的な曲率はゼロではない．
[13)] 訳注：図 13.1.

際に計算するやり方をⅣ章で考えることにする．

空間が曲がっていれば計量テンソルは座標依存性をもつが，逆は必ずしも成り立たない．すなわち

$$\text{曲がった空間} \quad \Longrightarrow \quad g_{ik}\ \text{は座標に依存している} \tag{13.10}$$

考えやすいように $g_{ik} = \text{const.}$ は平らな空間を意味しているということを示そう[14]．$g_{ik} = \text{const.}$ のときには，線素は定数係数をもつ 2 次形式である．このような形式は，周知のように座標系の回転によって対角化することができる（主軸変換）．個々の座標の比率を変えれば $(x_i \to c_i\, x_i)$ $g'_{ik} = \delta_{ik}$ となる．これによって座標はデカルト座標になり，空間はユークリッド空間になる．しかし(13.10)の逆は成り立たない．というのは，$g_{ik}$ の座標依存性は(13.4)のように単に曲線座標を選んだせいかもしれない．

われわれは与えられた計量から物理的な長さを計算してきたし，それを使って（少なくとも局所的な）面を構成してきた．逆に，与えられた面上の長さを測ってその面が平らか否かを調べることができる．たとえば，地表（または 2 次元の球面上）には平面 3 角形は描けないのであるから，大きい三角形を地上に描けば内角の和が 180° からずれているのがはっきりする．このようなずれは 3 次元空間でも生じるであろう．

ガウス(Gauss，1777-1855)は 3 角形を成す三つの山インゼルスベルク(Inselberg)－ブロッケン(Brocken)－ホーエンハーゲン(Hohenhagen)の内角の和を測り，180° を得た．彼はこの実験によって，われわれの 3 次元空間は長さほぼ 100 km にわたってユークリッド的であることを証明した．しかしながら，ガウスのもともとの目論見はわれわれの空間がユークリッド的であることを検証することではなくて，ハノーバー(Hannover)王国の領土の計測であったようだ．しかしガウスは，空間が非ユークリッドである可能性をはっきりと意識していた．

等価原理によると，重力場は座標依存性のある $g_{ik}(x)$ によって書き表される．すなわち，重力場があるということは，4 次元空間（時間次元と空間 3 次元）が幾何学的に曲がっていることを意味する．これから確立しようとして

[14] 訳注：数学で言う対偶を示している．

いる $g_{\mu\nu}(x)$ に対する場の方程式は，この曲がりと重力場の源（特に質量）の関係を定量的に記述する．そういう意味で質量は空間の曲がりを引き起こすのである．

## 測地線

重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ における粒子の運動方程式は

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{13.11}$$

である．これに従って定められる軌道はまた，$g_{\mu\nu}(x)$ で定義されるリーマン空間の**測地線**でもある．測地線とは与えられた 2 点間の最短の距離を意味する．球面上の 2 点では，その 2 点を通る大円の短いほうの線分である．2 点 A と B の間の測地線を得る必要条件は

$$\boxed{\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{|g_{\mu\nu}|\,dx^\mu\,dx^\nu} = \text{極小} \qquad \text{測地線に対する条件}} \tag{13.12}$$

である．求める曲線を $x^\mu(\tau)$ としよう．これからのわずかなずれ $\delta x^\mu(\tau)$ を考える．曲線 $x^\mu(\tau)+\delta x^\mu(\tau)$ によって同じように A と B がつながるためには

$$\delta x^\mu(A) = \delta x^\mu(B) = 0 \tag{13.13}$$

でなければならない．よって

$$\delta\int_A^B ds = \delta\int_A^B \sqrt{|g_{\mu\nu}|\,d\,x^\mu\,d\,x^\nu} = \delta\int_A^B d\tau\sqrt{|g_{\mu\nu}(x)|\,\frac{d\,x^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau}} = 0 \tag{13.14}$$

が曲線 $x^\mu(\tau)$ の長さを極小にするための必要条件である[15]．ここでラグランジュ関数

$$\mathscr{L}\big(\dot{x}(\tau),\,x(\tau)\big) = -m\,c\sqrt{|g_{\mu\nu}|\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu} \tag{13.15}$$

[15] 訳注：ミンコフスキー空間で考えると明らかであるが，(13.12)の条件は時空間の 2 点を結ぶ最短距離を与える条件である．

を導入する．なお $x = (x^\mu)$ であり，また $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$ である．よって(13.14)はハミルトンの原理になる．

$$\delta \int_A^B d\tau\ \mathscr{L}(\dot{x},\, x) = 0 \tag{13.16}$$

対応するラグランジュ方程式は力学でよく知られていて

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\kappa} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\kappa} \tag{13.17}$$

となる．演習 13.1 で示されるように，これは(13.11)と等しい．軌道は 2 点 A と B の距離の極値である．しかし，その曲線が極小であるか極大であるかを見るには，より詳細な検討が必要である．

ラグランジュ関数(13.15)を導入したことで，(13.11)の測地線的解釈と力学的解釈の関係がはっきりする．ラグランジュ関数の係数は，重力場のないときに特殊相対論のラグランジュ関数としてよく知られた $\mathscr{L}$ （$A^\beta = 0$ と置いた(6.22)）に移行するように選ばれている．

ラグランジュ関数はたいてい非常に単純なスカラー表示である．(6.22) における追加の項ももっとも単純なスカラー量であり，それは軌道を外的なベクトル場 $A^\beta$ に結びつけている．この類推で，(13.15)は与えられたテンソル場 $g_{\mu\nu}(x)$ で構成された非常に単純な表示となっている．また(13.15)の根号なしでも(13.11)が得られる．

(13.11)が測地線を与えるということに対する別の根拠を与えよう．任意の点 $x_0$ の近傍では近似 $g_{\mu\nu}(x) \approx g_{\mu\nu}(x_0) = \text{const.}$ が使える．(13.9)によって，われわれはこの点の近傍にデカルト座標 $\xi^\alpha$ を導入できる． $g_{\mu\nu}(x_0) = \text{const.}$ であるので，クリストッフェル記号はゼロとなり[16]，(13.11)は**局所的に**

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \tag{13.18}$$

となる．この方程式は直線を与える．ゆえに(13.11)で定義された線，または軌道 $x^\kappa(\tau)$ は**局所的に直線**であり，よって局所的にもっとも短い接続線である．この局所的にもっとも短い接続線を繋いでゆけば測地線が得られる．

---

[16] 訳注：座標変換で $g'_{\mu\nu}(x_0) = 0$ にできる．4 節，1 小節 “運動方程式” の訳注も参照のこと．

まとめると次のことがわかった．$g_{\mu\nu}$ で与えられる重力場内の粒子は，$g_{\mu\nu}$ で定義されるリーマン空間内の測地線に沿って動く．これは 4 次元空間（時間と三つの場所の座標）の測地線であって，通常の 3 次元空間の測地線ではない．このことは放物運動の例（演習 13.3）などで明らかになるであろう．

## 演習

13.1: 計量 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu = c^2\, d\tau^2$ をもつ空間で軌道 $x^\mu(\tau)$ を探すことにする．A から B へのこの軌道は定常である．

$$\delta \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{ds}{c} = \delta \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\tau\ \mathscr{L}\left(\dot{x}(\tau), x(\tau)\right) = 0$$

ここで

$$\mathscr{L} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\, \dot{x}^\mu\, \dot{x}^\nu}$$

これは A と B を最短距離で結ぶための必要条件である．この変分原理に対するオイラー－ラグランジュ方程式を立てよ．

13.2: 次のそれぞれの空間と座標に関して測地線 $x^\mu(\tau)$ に対する微分方程式を立てよ．

– 球座標で張った $\mathrm{R}^3$.

– 円柱座標で張った $\mathrm{R}^3$.

– 線素 $d\,s^2 = a^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$ で表される球面．

それぞれに対して特解を求めよ．

13.3: 投げた石の軌道は

$$x^0 = c\,t, \quad x^1 = x = v\,t, \quad x^2 = y = 0, \quad x^3 = z = -g\,t^2/2$$

で与えられる．以下を求めよ，

- $x^3$–$x^0$ 面上の $x^3 = 0$ における軌道の曲率半径 $R_1$.
- $x^3$–$x^1$ 面上の $x^3 = 0$ における軌道の曲率半径 $R_2$.

# IV　一般相対性理論の数学的基礎

## 14　リーマン空間のテンソル

IV 章では $N$ 次元リーマン空間でのテンソル解析を取り扱う．この空間のテンソルがこの節で定義される．

**線素**

$$ds^2 = \sum_{i,\,k=1}^{N} g_{ik}\,(x^1, \ldots, x^N)\,dx^i\,dx^k = g_{ik}(x)\,dx^i\,dx^k \tag{14.1}$$

によって $N$ 次元空間の計量が決められる．われわれはアルファベットの添字（$i = 1, 2, \ldots, N$）と 3 節で慣れた和の規約を使う．$x^i$ は任意であるが，一般には曲線座標である．計量 $g_{ik}(x)$ は微分可能であるとする．さらに

$$g_{ik} = g_{ki} \tag{14.2}$$

が成り立つとする．線素(14.1)によって定義された空間は**リーマン空間**と呼ばれる．このリーマン空間は，3 次元のユークリッド空間とミンコフスキー空間を特別な場合として含む．上に仮定した微分可能性は，$ds^2$ は点 $x_0$ の近傍で定数係数をもつ二次形式で近似できるということを示唆している．

$$ds^2 \approx g_{ik}(x_0)\,dx^i\,dx^k = \delta_{ik}\,d\xi^i\,d\xi^k \tag{14.3}$$

すなわち，係数が定数であるので二次形式である $ds^2$ は座標系の回転で対角化することができる（主軸変換）．対角化する際には，デカルト座標（またはミンコフスキー座標）$\xi^i$ を得るために簡単なスカラー変換($x_i \to \mathrm{const.}\cdot x_i$)

を行っている．これによって，(11.14)から導出されるすべての関係（特にクリストッフェル記号に対する表式）を再現することができる．前記のように，平らな空間を使って局所的に近似する例としては，球面の接平面，または重力場における衛星実験室の局所慣性系がある．

計量テンソルの行列式はゼロであってはならない．

$$\det(g_{ik}) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{vmatrix} = \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N}\, g_{1i_1}\, g_{2i_1} \cdots g_{Ni_1} \neq 0 \tag{14.4}$$

ここで $\epsilon^{i\cdots}$ は，(5.19)を拡張して定義された $N$ 次元のレビ-チビタ記号である．$\det(g_{ik}) \neq 0$ であるので，$(g_{ik})$ の逆行列 $(g^{ik})$

$$g_{ip}\, g^{pk} = \delta_i^k \tag{14.5}$$

が存在する．さて(14.1)の $x^i$ の代わりに，(14.1)の形式を変えない $N$ 個の別の座標 $x'^i$ を導入することができる．そのためにわれわれは，ある一般座標変換

$$x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^N) \tag{14.6}$$

とその逆変換

$$x^i = x^i(x'^1, \ldots, x'^N) \tag{14.7}$$

を考える．この座標微分

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\, dx^k = \alpha_k^i(x)\, dx^k \tag{14.8}$$

と次の座標微分

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\, dx^k = \bar{\alpha}_k^i(x')\, dx'^k \tag{14.9}$$

を使って，座標に依存した次の変換行列 $\alpha$ と $\bar{\alpha}$

$$\boxed{\alpha_k^i(x) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}} \qquad \boxed{\bar{\alpha}_k^i(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}} \tag{14.10}$$

が作られる．積の規則

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}=\delta^i_m \tag{14.11}$$

から

$$\alpha^i_k\,\bar{\alpha}^k_m=\bar{\alpha}^i_k\,\alpha^k_m=\delta^i_m \tag{14.12}$$

が得られる．

さて，われわれは距離 $ds$ を新しい座標 $x'^i$ で表す．

$$ds^2=g_{ik}\,dx^i dx^k=g_{ik}\,\bar{\alpha}^i_p\,\bar{\alpha}^k_m\,dx'^p dx'^m=g'_{pm}\,dx'^p dx'^m \tag{14.13}$$

これによって線素は，一般座標変換(14.6)のもとでは**共変**（形式不変）であることが明確に示された．すなわち，変換のあとでも線素は前と同じ形をもっている．そして(14.13)から，計量テンソルがどのように変換されるのかがわかる．

$$g'_{pm}=\bar{\alpha}^i_p\,\bar{\alpha}^k_m\,g_{ik} \tag{14.14}$$

(14.12)を使うと

$$g_{ik}=\alpha^p_i\,\alpha^m_k\,g'_{pm} \tag{14.15}$$

が得られる．座標変換によって空間の点は新しい名前（座標値）を得るが，これはまた計量テンソルを変える．しかし（$ds^2$ によって決められる）点の間の距離は変わらない．このように空間の計量は座標変換では変化せず，平面は平面のままであり，球面は球面のままである．

さて，今まで議論してきた観点をミンコフスキー空間の観点，そして適用できるかぎりユークリッド空間の観点と比較してみよう．

1. 考えている計量空間は次の線素によって定義される．すなわち

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \delta_{ik}\,dx^i\,dx^k=dx^2+dy^2+dz^2 && \text{(ユークリッド)}\\
ds^2 &= \eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 && \text{(ミンコフスキー)}\\
ds^2 &= g_{ik}\,(x)\,dx^i dx^k \overset{\text{たとえば}}{=} a^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2) && \text{(リーマン)}
\end{aligned} \tag{14.16}$$

2. 線素を不変にするような変換が考えられる．それは，ユークリッド空間では直交変換，ミンコフスキー空間ではローレンツ変換，そしてリーマン空間では一般座標変換である．

3. 座標微分の変換は次のとおりである．

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta}\, dx^{\beta} \quad （ローレンツ変換）$$
$$dx'^{i} = \alpha^{i}_{k}(x)\, dx^{k} \quad （一般座標変換）$$

行列 $\Lambda$ と $\bar{\Lambda}$ は $\alpha$ と $\bar{\alpha}$ に対応している．（直交変換に対する類似の関係はこれ以上記述しない．）

$\Lambda$ は座標に依存しないので，座標の間の変換はそれ自身線形である．これに対して $\alpha$ は座標に依存しており，変換は考えている場所に依存している．

4. テンソルは添字の付いた量として導入され，座標微分のように変換される．テンソルは下付き，上付き（共変，反変）の添字をもつ．ゆえに計量テンソルに添字が下あるいは上に付けられる．

変換行列それ自身はテンソルではないので，添字は上下に重ねて書いてよい（たとえば，${\alpha^{i}}_{k}$ ではなく $\alpha^{i}_{k}$ と書く）．

5. 各変換に対して項目 1.〜項目 4. の内容は形式的にはよく似ている．しかし，変換行列が座標に依存しているかどうかはテンソル場の微分の際に本質的な違いをもたらす．

これまでのリーマン空間の議論は項目 1.〜項目 3. に関連している．この節ではさらにテンソル（項目 4.）を定義する．つづく節ではリーマン空間のテンソル場の微分を調べる．

(14.8)の $dx^i$ のように座標変換する量 $A^i$，すなわち

$$A'^{i} = \alpha^{i}_{k}\, A^{k} \tag{14.17}$$

のように座標変換する量を**反変ベクトル**と呼ぶ．もっとくわしい呼び方は“あるベクトルの反変成分”であるが，添字の付いた量それ自身を前のようにベクトルと省略して呼ぶことにする．ベクトル場 $A^i(x)$ に対しては(14.17)が

どの（時空の）点でも成り立たなければならない．

$$A'^i(x') = \alpha^i_k(x)\, A^k(x) \tag{14.18}$$

このとき点の座標 $x$ と $x'$ は(14.7)の関係がある．座標変換のもとで不変である量 $S(x)$

$$S' = S \quad \text{そして} \quad S'(x') = S(x) \tag{14.19}$$

は**スカラー**あるいは**スカラー場**と呼ばれる．

(14.12)を使えば(14.17)の逆変換

$$A^i = \bar{\alpha}^i_k\, A'^k \tag{14.20}$$

が得られる．さらに次の関係式

$$A_i = g_{ik}\, A^k \tag{14.21}$$

から，どの反変ベクトル $A^i$ に対しても対応した**共変ベクトル**が得られる．**共変**という言葉は，すでにミンコフスキー空間を議論した際に述べたように**形式不変**の意味をもっているが，他方では下付きの添字を示している．(14.5)を使って，われわれは(14.21)の逆

$$A^i = g^{ik}\, A_k \tag{14.22}$$

を得る．さらに共変ベクトルの間の変換は

$$A'_i = g'_{ik}\, A'^k = \bar{\alpha}^p_i\, \bar{\alpha}^m_k\, g_{pm}\, \alpha^k_n\, A^n = \bar{\alpha}^p_i\, g_{pm}\, A^m = \bar{\alpha}^p_i\, A_p \tag{14.23}$$

のようになる．これに対応して

$$A_i = \alpha^i_k\, A'_k \tag{14.24}$$

が成り立つ．まとめると次のように言える．反変ベクトルは $\alpha^i_k$ で変換され，共変ベクトルは $\bar{\alpha}^i_k$ で変換される．逆変換はそれぞれの逆行列による．

これよりリーマン空間におけるテンソルの概念を一般的に定義する．**$r$ 階のテンソル**は $r$-個の添字を付けた（$N^r$ 個の成分をもった）量であり，それ

ぞれの添字に関してベクトルのように変換される．(14.19)のように，変換される添字の付いていない量はゼロ階のテンソル（または，単にスカラー）である．(14.17)のように，変換される 1 個の添字の量は 1 階のテンソル（またはベクトル）である．そして 2 階のテンソルは $T^{ik}$ のように 2 重に添字の付いた量で

$$T'^{ik} = \alpha^i_p \, \alpha^k_m \, T^{pm} \tag{14.25}$$

のように変換される．したがって，次の式

$$T_{ik} = g_{ip} \, g_{km} \, T^{pm} \tag{14.26}$$

に従って変換される共変成分に対して

$$T'_{ik} = \bar{\alpha}^p_i \, \bar{\alpha}^m_k \, T_{pm} \tag{14.27}$$

が成り立つ．また次のように混合成分も導入できる．

$$T_i{}^k = g^{kp} \, T_{ip} = g_{ip} \, T^{pk} \tag{14.28}$$

$$T^i{}_k = g^{ip} \, T_{pk} = g_{kp} \, T^{ip} \tag{14.29}$$

一般に $T^i{}_k \neq T_k{}^i$ だから，混合成分の添字は上下入れ替えてはいけない．対称なテンソルに対してだけは両方の量は等しく，この場合には $T^i_k$ とも書ける．

(14.14)から $g_{ik}$ はテンソルの定義を満たしていることがわかり，これによって**計量テンソル**という呼び方が正しいことがわかる．計量テンソルの混合成分は，(14.5)を使って次のように与えられる．

$$g^i{}_k = g^{ip} \, g_{pk} = \delta^i_k \tag{14.30}$$

対称性 $g_{ik} = g_{ki}$ のために添字を付け替えてもよい$(g^i{}_k = g_k{}^i = g^i_k)$．

上の添字と下の添字についての和はテンソルの縮約と呼ばれている．2 階のテンソルの縮約は次のようにスカラーを与える．

$$T' = T'_i{}^i = \bar{\alpha}^p_i \, \alpha^i_m \, T_p{}^m = T_m{}^m = T \tag{14.31}$$

こうしてできたスカラーに対して，新しい文字は普通使用しない．というのは，テンソル $T_i{}^k$ には添字が付いているから，スカラー $T$ とはっきり区別できるからである．

テンソル $T^{ik} = A^i B^k$ に対して縮約を取れば，二つのベクトルの**スカラー積**が得られる．

$$A'_i B'^i = g'_{ik} A'^k B'^i = g_{mp} A^m B^p = A_m B^m \tag{14.32}$$

ここまでに与えられた関係式は容易に一般化できて，高階テンソルの場合にも当てはめられる．5 節で与えた（同じ場所での）テンソルの積と和の規則は同様に成り立つ．しかし，微分は区別して考えなければならない．さてこの規則に従えば，たとえば次のようなテンソル方程式

$$T^{ik}{}_p = V^i A^k{}_p \tag{14.33}$$

を判定できる．すなわち $T$，$V$，$A$ はテンソルであり，よってこのような方程式は一般座標変換に関して共変である．これはちょうど特殊相対論で取り扱われるテンソル方程式が，ローレンツ変換に関して不変であるのと同じである．このような方程式は局所慣性系でも重力場のある座標系でも同じ形を取るのであるから，これを考察するのは意義があるのは明らかである．今やよく知られた特殊相対論の形（重力なしの法則）を局所慣性系で取るような，共変な方程式を作り上げさえすればよいことになった．そうすればこのような方程式は任意の座標系で成り立ち，重力があるときの物理法則を記述できることになる．

# 15 共変導関数

リーマン空間では，テンソル場の偏微分関数は（ユークリッド空間やミンコフスキー空間とは対照的に）一般にはテンソル場ではない．われわれは共変導関数と呼ばれる一般化された微分を定義する．するとテンソル場の共変導関数は再度テンソル場を与える．

求める共変導関数に対しては次のことが成り立つ．

1. テンソル場の共変導関数は 1 階だけ高階のリーマン・テンソル場を与える．
2. $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ （または $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$）に対しては，共変導関数は単純な偏微分関数になる．

まず，(11.18)で示されたクリストッフェル記号

$$\Gamma^i_{kp} = \frac{g^{in}}{2}\left(\frac{\partial g_{pn}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^n}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^q}\,\frac{\partial^2 \xi^q}{\partial x^k\,\partial x^p} \tag{15.1}$$

の変換の様子を見よう．われわれは局所デカルト座標 $\xi^q$ (14.3)を導入し，さらに(11.10)を使った．今，座標 $x'^k$ に対して $\Gamma'^i_{kp}$ を書き，他の座標 $x^m$ への変換を行う．

$$\begin{aligned}\Gamma'^i_{kp} &= \frac{\partial x'^i}{\partial \xi^q}\,\frac{\partial^2 \xi^q}{\partial x'^k\,\partial x'^p} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\,\frac{\partial x^m}{\partial \xi^q}\,\frac{\partial}{\partial x'^k}\left(\frac{\partial \xi^q}{\partial x^s}\,\frac{\partial x^s}{\partial x'^p}\right)\\ &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\,\frac{\partial x^m}{\partial \xi^q}\left(\frac{\partial^2 \xi^q}{\partial x^r\,\partial x^s}\,\frac{\partial x^r}{\partial x'^k}\,\frac{\partial x^s}{\partial x'^p} + \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^k\,\partial x'^p}\,\frac{\partial \xi^q}{\partial x^s}\right)\\ &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\,\frac{\partial x^r}{\partial x'^k}\,\frac{\partial x^s}{\partial x'^p}\,\Gamma^m_{rs} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\,\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^k\,\partial x'^p}\end{aligned} \tag{15.2}$$

(14.10)を使ってわれわれは

$$\Gamma'^i_{kp} = \alpha^i_m\,\bar{\alpha}^r_k\,\bar{\alpha}^s_p\,\Gamma^m_{rs} + \alpha^i_m\,\frac{\partial \bar{\alpha}^m_k}{\partial x'^p} \tag{15.3}$$

を得る．右辺第 2 項がなければ，これは 3 階テンソルの変換様式である．変換行列 $\alpha$ の座標依存性が第 2 項を導き，そしてこれはクリストッフェル記号はテンソルではないということを示唆している．

今，$\partial A^i/\partial x^k$ と $\Gamma^i_{kp}\,A^p$ の変換の様子を調べる．それは次のようになる．

$$\frac{\partial A'^i}{\partial x'^k} = \frac{\partial}{\partial x'^k}\left(\alpha^i_m\,A^m\right) = \alpha^i_m\,\frac{\partial A^m}{\partial x^r}\,\frac{\partial x^r}{\partial x'^k} + \frac{\partial \alpha^i_m}{\partial x'^k}\,A^m$$

$$= \alpha^i_m\,\overline{\alpha}^r_k\,\frac{\partial A^m}{\partial x^r} + \frac{\partial \alpha^i_m}{\partial x'^k}\,A^m \tag{15.4}$$

$$\Gamma'^i_{kp}\,A'^p = \alpha^i_m\,\alpha^p_n\,\overline{\alpha}^r_k\,\overline{\alpha}^s_p\,\Gamma^m_{rs}\,A^n + \alpha^i_m\,\frac{\partial \overline{\alpha}^m_k}{\partial x'^p}\,\alpha^p_n\,A^n$$

$$= \alpha^i_m\,\overline{\alpha}^r_k\,\Gamma^i_{rn}\,A^n + \alpha^i_m\,\alpha^p_n\,\frac{\partial\,\overline{\alpha}^m_p}{\partial x'^k}\,A^n \tag{15.5}$$

すぐ上の式では関係式

$$\frac{\partial \overline{\alpha}^m_k}{\partial x'^p} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^p\,\partial x'^k} = \frac{\partial \overline{\alpha}^m_p}{\partial x'^k} \tag{15.6}$$

が使われた．これは $\overline{\alpha}$ の定義と偏微分の交換可能性から出てくる．(14.12) の微分から次のことがわかる．

$$\frac{\partial(\overline{\alpha}^m_p\,\alpha^i_m)}{\partial x'^k} = 0, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\partial \overline{\alpha}^m_p}{\partial x'^k}\,\alpha^i_m = -\overline{\alpha}^m_p\,\frac{\partial \alpha^i_m}{\partial x'^k} \tag{15.7}$$

これに $\alpha^p_n$ を掛け，(15.5) の右辺の第 2 項にその結果を使うと

$$\Gamma'^i_{kp}\,A'^p = \alpha^i_m\,\overline{\alpha}^r_k\,\Gamma^m_{rn}\,A^n - \frac{\partial \alpha^i_m}{\partial x'^k}\,A^m \tag{15.8}$$

を得る．これに (15.4) を足し合わせると

$$\Gamma'^i_{kp}\,A'^p + \frac{\partial A'^i}{\partial x'^k} = \alpha^i_m\,\overline{\alpha}^r_k\,\left(\frac{\partial A^m}{\partial x^r} + \Gamma^m_{rn}\,A^n\right) \tag{15.9}$$

となる．この和は 2 階のテンソルのように変換され，**共変導関数**と呼ばれる．ここで偏微分を省略して，次のように 1 本の縦線で表すことにする．

$$A^i_{|k} \equiv \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \tag{15.10}$$

共変導関数に対しては2本の縦線を使う.

$$\boxed{A^i_{\|k} \equiv A^i_{|k} + \Gamma^i_{kp}\, A^p \qquad \text{共変導関数}} \tag{15.11}$$

これによって方程式(15.9)は

$$A'^i_{\|k} = \alpha^i_p\, \overline{\alpha}^m_k\, A^p_{\|m} \tag{15.12}$$

と書き表される. 共変導関数は, このように2階の混合テンソルのように変換される. 同様に

$$A_{i\|k} \equiv A_{i|k} - \Gamma^p_{ik}\, A_p \tag{15.13}$$

は共変テンソルのように変換されることが示される.

さらに, 他の階のテンソル場に対して共変導関数を定義しよう. スカラー場に対して, (14.19)から次の導関数が得られる.

$$\frac{\partial\, S'}{\partial\, x'^i} = \frac{\partial\, S}{\partial\, x^k}\, \frac{\partial\, x^k}{\partial\, x'^i} = \overline{\alpha}^k_i\, \frac{\partial\, S}{\partial\, x^k} \tag{15.14}$$

この量はあたかも共変ベクトルのように変換されるので, われわれはスカラー場の共変導関数を次のように定義する.

$$S_{\|i} \equiv S_{|i} = \frac{\partial S}{\partial x^i} \tag{15.15}$$

2階のテンソルの共変導関数を定めるために

$$T^{ik} = A^i\, B^k \tag{15.16}$$

から始める. これは一般化の妨げにはならない. というのは, 2階のテンソルはベクトルのように成分ごとに変換されると定義されているからである. 共変導関数はチェーン則[1]と言われる次の関係

$$T^{ik}{}_{\|p} = \left(A^i\, B^k\right)_{\|p} \equiv A^i{}_{\|p}\, B^k + A^i\, B^k{}_{\|p} \tag{15.17}$$

を満たさなければならない. 右辺はテンソルなので, これによって定義された量 $T^{ik}{}_{\|p}$ もまたテンソルである. (15.11)を使ってこれを書き換えると

$$T^{ik}{}_{\|p} = A^i{}_{|p}\, B^k + A^i\, B^k{}_{|p} + \Gamma^i_{pm}\, A^m\, B^k + \Gamma^k_{pm}\, B^m\, A^i \tag{15.18}$$

[1] 訳注：ライプニッツ則とも言われる.

となる．われわれはこれによって

$$\boxed{T^{ik}{}_{\|p} = T^{ik}{}_{|p} + \Gamma^{i}_{pm}\, T^{mk} + \Gamma^{k}_{pm}\, T^{im}} \tag{15.19}$$

を得る．(15.11) と (15.13) の符号の違いに気をつけると，対応して

$$T_{ik\|p} = T_{ik|p} - \Gamma^{m}_{ip}\, T_{mk} - \Gamma^{m}_{kp}\, T_{im} \tag{15.20}$$

$$T^{i}{}_{k\|p} = T^{i}{}_{k|p} + \Gamma^{i}_{pm}\, T^{m}{}_{k} - \Gamma^{m}_{kp}\, T^{i}{}_{m} \tag{15.21}$$

が出る．同様にして，より高階のテンソルの共変導関数が得られる．

今まで定義された共変導関数に対して次のことが成り立つ．

1. リーマン空間で共変導関数は対応する階数のテンソルになる．
2. ミンコフスキー空間または局所慣性系では，共変導関数は $g_{ik} = \eta_{ik}$（または $\Gamma^{i}_{kp} = 0$）のために単なる偏微分関数になる．
3. 共変導関数に対しては通常の計算法，特にチェーン則が成り立つ．

今，計量テンソルの共変導関数を作ってみる．

$$g_{ik\|p} \overset{(15.20)}{=} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{p}} - \Gamma^{m}_{ip}\, g_{mk} - \Gamma^{m}_{kp}\, g_{im} = 0 \tag{15.22}$$

$\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}\, g_{\cdot\cdot}$ に (11.16) を用いるとすべての項は打ち消しあい，右辺はゼロになるのがわかる．

微分 $d\,A^{i} = A^{i}{}_{|p}\, d\,x^{p}$ の共変的一般化は

$$D\,A^{i} \equiv A^{i}{}_{\|p}\, d\,x^{p} \qquad \text{（共変微分）} \tag{15.23}$$

である．これはベクトルであるが，$d\,A^{i} = A^{i}{}_{|p}\, d\,x^{p}$ は一般にはベクトルではない．この事情は次の節でくわしく議論される．

# 16 平行移動

共変導関数の付加項を幾何学的に説明し，かつ例を挙げて空間の曲がりとの関係を議論する．空間の曲がりの厳密な数学的取扱いは，ここことは無関係に18節でなされる．よって，この節は飛ばしてもかまわない．

ベクトル場 $A^i(x)$ の全微分

$$dA^i = A^i{}_{|p}\,dx^p = A^i(x+dx) - A^i(x) \tag{16.1}$$

は，一般にはベクトルではない．というのは，$A^i(x+dx)$ と $A^i(x)$ とは，別々の変換係数 $\alpha(x+dx)$ と $\alpha(x)$ を使って**別々に変換される**からである．二つのベクトルの差が再びベクトルになるには，われわれは二つのベクトルを同じ点 $x$ で考察しなければならない．このためにまず，われわれはベクトル $A^i(x+dx)$ を $x+dx$ から $x$ へ**ずらさなければ**ならない．このずらしは，デカルト座標に対しては何らの影響も出ないようになされなけばならない．というのは，デカルト座標に対しては(16.1)はすでにベクトルになっているからである．デカルト座標では，成分を変えないで平行に移動したベクトルは，元のベクトルに対してずれたことにはならない．よって考えているずれは，幾何学的には**平行移動**を意味する．われわれは次の記号を作る．

$$\delta A^i = \ dx\ \text{だけの平行移動による}\ A^i\ \text{の変化} \tag{16.2}$$

これを使うと，次のようにして二つのベクトルの**同じ点における**無限小差を作り上げることができる．

$$\begin{aligned} DA^i &= \big(x\ \text{のほうへずらされた}\ A^i(x+dx)\big) - A^i(x) \\ &= A^i(x+dx) - \delta A^i - A^i(x) = dA^i - \delta A^i \end{aligned} \tag{16.3}$$

量 $\delta A^i$ は，$A^k$ と $dx^p$ に比例しなければならない．このことがさし当たり未知の係数である $\varGamma^i_{kp}$ を使った次の表式の根拠である．

$$\boxed{\delta A^i = -\varGamma^i_{kp}\,A^k\,dx^p \qquad \text{平行移動}} \tag{16.4}$$

$\Gamma^i_{kp}$ は $DA^i$ がベクトルになるように定められる．ところでわれわれは，(15.11) から $A^i{}_{\|p}\,dx^p = dA^i + \Gamma^i_{kp}A^k\,dx^p$ がベクトルであることをすでに知っており，$\Gamma^i_{kp}$ はクリストッフェル記号である．この表記はまさに (16.4) をともなった (16.3) である．かくして (16.4) の係数 $\Gamma^i_{kp}$ は，すでにわかっているクリストッフェル記号となる．

さらに，対応する共変な型は次のようになる．

$$DA_i = A_{i\|k}\,dx^k = dA_i - \delta A_i \tag{16.5}$$

$$\delta A_i = \Gamma^p_{ik}\,A_p\,dx^k \tag{16.6}$$

**例：極座標**

簡単な例を使って $\delta A$ が平行移動であることを説明する．まず 2 次元ユークリッド空間を考え，極座標

$$x^1 = \rho, \qquad x^2 = \phi \tag{16.7}$$

を使う．これから線素は

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k = d\rho^2 + \rho^2\,d\phi^2 \tag{16.8}$$

となる．よって計量係数は

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \qquad (g^{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix} \tag{16.9}$$

となる．そして $g_{ik}$ のほとんどの偏微分はゼロになる．すなわち

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 2\rho \qquad \text{を除いて} \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p} = 0 \tag{16.10}$$

これからクリストッフェル記号 (15.1) が定まり，そして次の $\Gamma^i_{kp}$ だけがゼロにならない．

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{g^{11}}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\rho, \qquad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{g^{22}}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{\rho} \tag{16.11}$$

次に基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を使って線素ベクトルを作り上げる．

$$d\boldsymbol{s} = dx^i\,\boldsymbol{e}_i = dx_i\,\boldsymbol{e}^i \tag{16.12}$$

次の式

$$ds^2 = d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k)dx^i\,dx^k = g_{ik}\,dx^i\,dx^k \tag{16.13}$$

から基底ベクトルのスカラー積が計量係数と関連づけられるので次の関係がわかる．

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k = g_{ik}, \qquad \boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^k = g^{ik} \tag{16.14}$$

直交座標（たとえば球座標や円柱座標）に対してはほとんどの場合，規格化された基底ベクトルが導入される．極座標に対しては，規格化された基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{\hat{\rho}}$ と $\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ は，ここで使われている基底ベクトルと次の式のような関係がある．

$$\boldsymbol{e}_{\hat{\rho}} = \boldsymbol{e}^1 = \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = \frac{\boldsymbol{e}_2}{\rho} = \rho\,\boldsymbol{e}^2 \tag{16.15}$$

さて，定数ベクトル

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat{x}} = \boldsymbol{e}_1\cos\phi - \boldsymbol{e}_2\frac{\sin\phi}{\rho} = A^i\,\boldsymbol{e}_i \tag{16.16}$$

の平行移動を調べてみよう．このベクトルは成分

$$A^1 = \cos\phi = \cos(x^2), \qquad A^2 = -\frac{\sin\phi}{\rho} = -\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^1} \tag{16.17}$$

をもつ．成分 $A^i$ の座標依存性は曲線座標を選んだためである．これに反して，ベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat{x}}$ 自身は場所に依存しない． $dA^i = A^i{}_{|p}\,dx^p$ は $x$, $x+dx$ 間の $\boldsymbol{A}$ の変化を示す物差しになっていないことをこの例で明らかにしよう．すなわち，次の特別なずらし

$$\left(dx^i\right) = \left(dx^1,\, dx^2\right) = (0,\, d\phi) \tag{16.18}$$

に対してわれわれは

$$\left(dA^i\right) = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^p}\,dx^p\right) = \left(-\sin\phi,\ -\frac{\cos\phi}{\rho}\right)d\phi \tag{16.19}$$

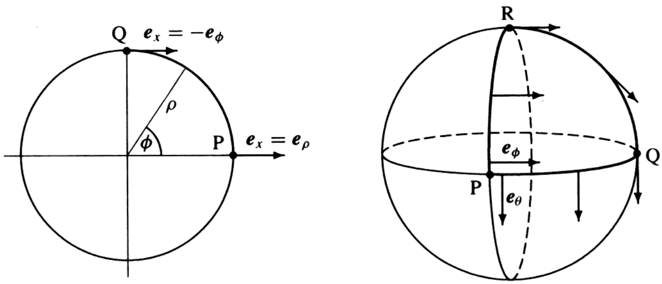



**図 16.1**: 左図：2 次元平面空間に極座標 $\rho$ と $\phi$ が用いられている．そして，ベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat{x}}$ が P から Q へ平行に移動している．ベクトルは一定であるが，その成分は $\boldsymbol{A} = (1,0)$ から $\boldsymbol{A} = (0,-1)$ へと変わっている．閉じられた経路（たとえばそこに示されている円）に沿って平行移動したこのようなベクトルは，元のベクトルに引き戻される．右図：曲がった 2 次元空間の例として一つの球面を考える．ベクトル $\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}$ は大円（測地線）に沿って P から Q と R を経て再び P へ移動する．この平行移動の際にベクトルと測地線の成す角は一定である．閉じられた経路に沿ってのこのシフトは，別のベクトル $\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ に導く．これが曲がった空間の一つの特性である．

と，そして

$$\left(\delta A^i\right) = \left(-\Gamma^i_{kp}\, A^k\, d\, x^p\right) = \left(-\Gamma^1_{22}\, A^2\, d\,\phi,\; -\Gamma^2_{12}\, A^1\, d\,\phi\right)$$
$$= \left(-\sin\,\phi,\; -\frac{\cos\,\phi}{\rho}\right) d\,\phi \tag{16.20}$$

を得る．これから共変微分はゼロになる．

$$D\, A^i = d\, A^i - \delta\, A^i = 0 \tag{16.21}$$

これはベクトル $\boldsymbol{A}$ が一定であることを反映している．

図 16.1 の左側に描いたように，四分割円に沿ってのベクトル $\boldsymbol{A}$ の平行移動を考える．

$$\left(x^i\right) = (\rho,\,\phi) = (1,\,0) \quad \xrightarrow{d\,\rho\,=\,0} \quad \left(x^i\right) = (\rho,\,\phi) = (1,\,\pi/2) \tag{16.22}$$

この道筋に沿っての $A^i$ の変化は(16.19)から得られる．

$$\int \left(d\, A^i\right) = \int_0^{\pi/2} d\phi\,(-\sin\,\phi,\, -\cos\,\phi) = (-1,\,-1) \tag{16.23}$$

このことは，定数ベクトル $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_{\hat{x}}$ の成分は道筋(16.22)に沿って

$$\left(A^i\right)=(1,\,0) \quad\longrightarrow\quad \left(A^i\right)=(0,\,-1) \tag{16.24}$$

のように変わることを意味する[2]．平行移動に基づく変化は，(16.20)から

$$\int\left(\delta A^i\right)=\int_0^{\pi/2} d\phi\,(-\sin\phi,\,-\cos\phi)=(-1,\,-1) \tag{16.25}$$

となる．定数ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対しては，$A^i(x)$ の座標依存性は平行移動による成分の変化のみを表している．結果として，それは $dA^i=\delta A^i$，あるいは $DA^i=0$ となる．

### 例：球面

測地線 $x^i(s)$ に対して接線ベクトル

$$u^i=\frac{dx^i}{ds} \tag{16.26}$$

を導入する．これを使えば，測地線方程式(13.11)を

$$\frac{du^i}{ds}=-\Gamma^i_{kp}\,u^k\,\frac{dx^p}{ds} \tag{16.27}$$

のように書くことができる．これは

$$du^i=-\Gamma^i_{kp}\,u^k\,dx^p=\delta u^i \tag{16.28}$$

を意味し，さらに

$$Du^i=0 \qquad (\text{測地線の接線ベクトル } u^i \text{ に対して}) \tag{16.29}$$

を意味する．成分 $u^i$ の変化は，平行移動による変化 $du^i=\delta u^i$，から生じる．すなわち，接線ベクトルは同時に測地線に沿った平行移動ベクトルでもある．測地線に沿っている別のベクトル $A^i$ が平行移動するときは，$u^i$ と $A^i$ との間の角度は一定に保たれる．このことが 2 次元空間での平行移動を定める．

---

[2] 訳注：(16.23)は $A^i(\pi/2)-A^i(0)=(-1,\,-1)$ と書ける．$A^i(0)=(1,\,0)$ を使うと $A^i(\pi/2)=(0,\,-1)$，すなわち(16.24)がでる．

もっとも簡単な例として，図 16.1 の左側に描いた平らな 2 次元空間内の移動を考える．ここでは測地線は直線であり，P と Q とを通る．平行移動に際しては，$\boldsymbol{e}_x$ とこの直線との間の角度は一定である．

必ずしも自明ではない例として，球面上の曲がった 2 次元空間内の移動を考える．これは図 16.1 の右側に与えてある．一つのベクトルを道筋

$$(\theta,\, \phi) = (\pi/2,\, 0) \;\rightarrow\; (\pi/2,\, \pi/2) \;\rightarrow\; (0,\, \text{任意}) \;\rightarrow\; (\pi/2,\, 0) \qquad (16.30)$$

に沿って平行移動させよう．道筋はすべて大円の一部，すなわち測地線の一部である．図 16.1 に従うと次のことがわかる．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat\theta} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat\phi} \quad (\text{平行移動}) \qquad (16.31)$$

終わりのベクトルは初めのベクトルと $\pi/2$ の角を成す．道筋(16.30)が作る閉じた三角形に対する内角の和 $3\pi/2$ が，初めと終わりのベクトルのなす角に関係している．

## 空間の曲がり

極座標を使った前の例（図 16.1 の左側）では，**ユークリッド**空間あるいは**曲がりのない**空間を取り扱った．このような空間は，どんなベクトルでも任意の閉じた道筋に沿った平行移動でそれ自身に移し替えることができるような空間である．すなわち

$$\oint \delta A^i = 0 \qquad (\text{ユークリッド空間}) \qquad (16.32)$$

これと対照的なのは次の式

$$\oint \delta A^i \;\overset{\text{一般に}}{\neq}\; 0 \qquad (\text{曲がった空間}) \qquad (16.33)$$

で表される**曲がった空間**である．その説明として“球面”の例が役立った．

後出の曲がり（曲率テンソル）の定義は，ここでの幾何学的な意味とは関連なしに与えられる．いずれにせよ問題とする 4 次元空間では，もはやこれまでのような直観的な説明は与えることはできない．さて，曲率テンソルはこ

こで議論した平行移動に基づいても定義することができる．そのために，ある閉じた曲線に沿って平行移動したあとでベクトル $A_i$ に生じる変化を考える．ここで，この曲線は無限小の領域 $df^{pm}$ を囲んでいるものとする．このベクトルの変化はこの領域に比例し，かつベクトルそれ自体に当然比例しなければならない．

$$\oint \delta A_i = \oint \Gamma^k_{ip} A_k \, dx^p = -\frac{1}{2} R^k{}_{ipm} A_k \, df^{pm} \tag{16.34}$$

（無限小の領域 $df^{pm}$ の代わりに）有限の領域を考えるときは，右辺には積分記号を付けることになる．

(16.34) の左辺は同じ場所での二つのベクトルの差であり，その差は閉じた曲線上で足し合わされる．したがって，この量はベクトルである．よって，比例係数 $R^k{}_{ipm}$ は 4 階のテンソルでなければならない．これがいわゆる**曲率テンソル**である．曲がっていない空間に対しては，(16.32) と，(16.34) の $A$ の任意性と $df$ の任意性とから $R^k{}_{ipm} = 0$ が出る．

## 演習

16.1: 球面上に座標 $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$ を張る．$\boldsymbol{e}_{\hat\theta}$ と $\boldsymbol{e}_{\hat\phi}$ を使って基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}^i$ を書き出せ．これらのスカラー積は計量テンソルとどのような関係があるか？

16.2: ベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat\phi}$ の平行移動を単位球上の経路

$$(\theta, \phi) = (\pi/2, 0) \xrightarrow{1} (\epsilon, 0) \xrightarrow{2} (\epsilon, \pi/2) \xrightarrow{3} (\pi/2, \pi/2) \xrightarrow{4} (\pi/2, 0)$$

に沿って計算せよ．

# 17 一般化されたベクトル演算

計量テンソルの行列式の特性をリーマン空間で調べ，さらに一般化された勾配(grad)，回転(rot)，発散(div)をこの空間で考察する．

## 計量テンソルの行列式

(14.4)と同じように，計量テンソルの行列式はゼロでないとする．

$$g = \det(g_{ik}) = \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N} g_{1 i_1} g_{1 i_2} \cdots g_{N i_N} \neq 0 \qquad (17.1)$$

完全反対称な量 $\epsilon^{i_1 \cdots i_N}$ は，(5.19)のように数値 0 または ±1 をとる．上の行列式を微分してみよう．

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = \sum_{k=1}^{N} \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_N} g_{1 i_1} g_{2 i_1} \cdots \frac{\partial g_{k i_k}}{\partial x^l} \cdots g_{N i_N} \qquad (17.2)$$

ここで

$$\frac{\partial g_{k i_k}}{\partial x^l} = \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \delta^m_{i_k} = \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} g^{mr} g_{r i_k} \qquad (17.3)$$

と置く．これを(17.2)に代入すると，抜け落ちている係数 $g_{k i_k}$ の代わりに $g_{r i_k}$ が入る．すると $r \neq k$ に対しては，(17.2)は積 $g_{r i_r} g_{r i_k}$ を含み，それは $i_r$ と $i_k$ に関して対称である．この両方の添字に関する $\epsilon$ の反対称性のために，この（積を含む項の）寄与は消え $r = k$ をもつ項だけが生き残る．その結果

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} g^{mk} g \qquad (17.4)$$

となる．このことから，縮約を取ったクリストッフェル記号は

$$\Gamma^k_{kl} = \frac{g^{km}}{2} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) = \frac{g^{km}}{2} \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}$$

$$\overset{(17.4)}{=} \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^l} = \frac{1}{2|g|} \frac{\partial |g|}{\partial x^l} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^l} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^l} \qquad (17.5)$$

となる．$\partial g_{ml}/\partial x^k$ と $-\partial g_{kl}/\partial x^m$ とは，（和を取る添字の交換によって）うち消し合っている．結果の表式は $g$ の符号に関係なく成り立ち，したがって $g<0$ の場合（たとえばミンコフスキー空間）でも成り立つ．

$g=\det(g_{ik})$ の変換特性を定めることにする．次の式

$$g'_{ik}=\bar{\alpha}_i^l\,\bar{\alpha}_k^m\,g_{lm} \tag{17.6}$$

は行列表示で

$$G'=\bar{\alpha}^T G\,\bar{\alpha} \qquad \text{ここで} \quad G=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix} \tag{17.7}$$

と書ける．これから次の行列式が出る．

$$g'=(\det\bar{\alpha})^2\,g=\left(\det\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right)^2 g \tag{17.8}$$

ここで $\det\bar{\alpha}>0$ としよう．このことは，たとえば直交変換において鏡像を排除することを意味する．$\det\bar{\alpha}>0$ に対して (17.8) は

$$\sqrt{|g'|}=\det\bar{\alpha}\,\sqrt{|g|} \tag{17.9}$$

となる．**ヤコビの行列式** $\det\bar{\alpha}$ は体積要素の変換の際に現れる．

$$d^N x=d\,x^1\ldots d\,x^N=\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right)d\,x'^1\ldots d\,x'^N=(\det\bar{\alpha})\,d^N x' \tag{17.10}$$

(17.9) を使うと，これは

$$\sqrt{|g'|}\;d^N x'=\sqrt{|g|}\;d^N x \tag{17.11}$$

となる．よって $\sqrt{|g|}\;d^N x$ はスカラーである．これは座標変換のもとで共変である体積要素である．例として，デカルト座標 $x$, $y$, $z$ $(g=1)$ から球座標 $r$, $\theta$, $\phi$ への移行を考えよう．ここで計量テンソルは $g'_{ik}=\mathrm{diag}\,(1,r^2,r^2\,\sin^2\theta)$ であり，また $g'=r^4\,\sin^2\theta$ である．これに対して (17.11) は次のようになる．

$$r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi=dx\,dy\,dz \tag{17.12}$$

完全反対称な量 $\epsilon^{i_1\cdots i_N}$ は，数値（+1，−1 の値）を割り当てることによって定義される．数値の割り当ては使用している座標には依存しないで成り立ち，したがって $\epsilon'^{i_1\cdots i_N}=\epsilon^{i_1\cdots i_N}$ である．これから次の式の上の行が出てくる．

$$\left(\frac{\epsilon^{i_1\cdots i_N}}{\sqrt{|g|}}\right)'=\left\{\begin{array}{c}\epsilon^{i_1\cdots i_N}/\sqrt{|g'|}\\ \alpha^{i_1}_{j_1}\ldots\alpha^{i_N}_{j_N}\,\epsilon^{j_1\cdots j_N}/\sqrt{|g|}\end{array}\right\}=\frac{\epsilon^{i_1\cdots i_N}}{\sqrt{|g|}}\det\alpha \qquad (17.13)$$

左辺をテンソルのように取り扱えば下の行が出てくる．これらは同じ結果になるので

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\epsilon^{i_1\cdots i_N}=\text{テンソル} \qquad (17.14)$$

が成り立つ．反対称な量 $\epsilon^{i_1\cdots i_N}$ の共変成分は，次の式

$$\epsilon_{i_1\cdots i_N}=g_{i_1j_1}\ldots g_{i_Nj_N}\,\epsilon^{j_1\cdots j_N}=g\,\epsilon^{i_1\cdots i_N} \qquad (17.15)$$

で定義される[3)]．（$(x^i)=(ct,\,x,\,y,\,z)$, $g_{ik}=\mathrm{diag}(1,\,-1,\,-1,\,-1)$, $g=-1$ をもつ）ミンコフスキー空間では，このことは $\epsilon_{0123}=-\epsilon^{0123}$ を意味する．（デカルト座標をとり，$g_{ik}=\mathrm{diag}(1,\,1,\,1)$, $g=1$ である）3 次元ユークリッド空間では $\epsilon_{123}=\epsilon^{123}$ となる．それに対して，（$(x^i)=(x,\,y,\,z)$, $g_{ik}=\mathrm{diag}(-1,\,-1,\,-1)$, $g=-1$ をもつ）ミンコフスキー空間の 3 次元部分空間では $\epsilon_{123}=-\epsilon^{123}$ となる．

## 勾配(grad)

ベクトル演算である勾配(grad)，回転(rot)，発散(div)は，すべて場の 1 階の偏微分関数からなっている．ここで，偏微分関数が共変導関数で置き換えられるときに生じる変更を調べることにする[4)]．

スカラーの共変導関数は偏微分関数そのものである．よって，勾配(grad)を成分で定義することができる．

$$S_{\|k}=S_{|k}=\frac{\partial S}{\partial x^k} \qquad (17.16)$$

---

3) 訳注：$g_{i_1j_1}\ldots g_{i_Nj_N}\,\epsilon^{j_1\cdots j_N}=g_{1k_1}\ldots g_{Nk_N}\,\epsilon^{k_1\cdots k_N}\epsilon^{i_1\cdots i_N}$

4) 訳注：(15.9)は異なった座標系間の偏微分の変換式である．たとえば，左辺の座標系をデカルト座標系とすると $\Gamma'^{i}_{kp}=0$ となり，$\partial A'^i/\partial x'^k$ のみが残る．

ここで，一般に $S_{|2} \neq S^{|2}$ であることに気をつけるべきである．たとえば，極座標 $(x^1, x^2) = (\rho, \phi)$ に対しては $S_{|2} = \partial S/\partial x^2 = \partial S/\partial \phi$ であり，そして $S^{|2} = \partial S/\partial x_2 = \rho^{-2}\, \partial S/\partial \phi$ である[5)]．これはユークリッド空間の直交座標（たとえば球座標，極座標，楕円座標）を使う通常の手法とは対照的である．その場合，通常，**規格化された**基底ベクトルを導入する．すると $S^{|2}$ または $S_{|2}$ の代わりに，極座標に対して $(\mathrm{grad}\, S)_\phi = \rho^{-1}\, \partial S/\partial \phi$ となる．共変基底ベクトルおよび反変基底ベクトルを使った公式と規格化基底ベクトルを使った公式の間の違いは，回転(rot) と発散(div) に対しても起こる．

## 回転(rot)

ベクトルの共変導関数から反対称テンソルが作られる．

$$A_{i\|k} - A_{k\|i} = A_{i|k} - \Gamma^p_{ik}\, A_p - A_{k|i} + \Gamma^p_{ki}\, A_p = A_{i|k} - A_{k|i} \qquad (17.17)$$

ここで，$\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ をもつ項は正確に打ち消されている．

3 次元空間に特徴的であるが，反対称テンソル(17.17)のうち，ゼロでなく，かつ独立な成分の集合は 3-ベクトルになりえて，それは rot $\boldsymbol{A}$ で示される．デカルト座標に対しては $(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A})^i = \epsilon^{ikl}\, A_{l|k}$ となる．そして(17.14)を使うと，対応するリーマン・ベクトルが出る．

$$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A})^i = \frac{\epsilon^{ikl}}{\sqrt{|g|}}\, \frac{1}{2}\, \left(A_{l\|k} - A_{k\|l}\right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \epsilon^{ikl}\, A_{l|k} \qquad (N = 3) \qquad (17.18)$$

## 発散(div)

(17.5)を使って共変な発散 $A^i{}_{\|i}$ を簡潔に書き表すことができる．

$$A^i{}_{\|i} = A^i{}_{|i} + \Gamma^i_{ip}\, A^p = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^p}\, A^p = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\, A^i\right) \qquad (17.19)$$

この式と次の式

[5)] 訳注：$(x_1, x_2) = (\rho, \rho^2 \phi)$ である．$x_1 =$const. として $S$ を $x_2$ で偏微分するとこの表式になる．

$$\int_V dx^1 \dots dx^N \frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\,A^i\right)}{\partial x^i} = \int_{F(V)} df_i \sqrt{|g|}\,A^i \tag{17.20}$$

とから，不変体積要素(17.11)を使った**ガウスの定理**

$$\int_V d^N x \sqrt{|g|}\,A^i{}_{\|i} = \int_{F(V)} df_i \sqrt{|g|}\,A^i \tag{17.21}$$

が出る．

## 演習

17.1: 球座標 $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$ に対して非同次マクスウェル方程式

$$E^i{}_{\|i} = 4\pi\varrho_e\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\epsilon^{ikl}\,B_{l|k} = \frac{4\pi}{c}\,j^i + \frac{1}{c}\,\frac{\partial E^i}{\partial t}$$

の共変形を具体的に求めよ．

# 18 曲率テンソル

重力場は，計量テンソルによって書き表されるということが等価原理から導かれた．13 節では，座標に依存した計量係数 $g_{ik}(x)$ は，一般に空間の曲がりを意味するということが明確になった．この節では，曲がりを定量的に記述するテンソルを導入する．この曲率テンソルは，一般相対性理論の場の方程式の設定に使われる．

すでによく知っている下記の事柄をまず思い起こそう．計量係数 $g_{ik}$ は

- リーマン空間の構造
- 用いられている座標

に依存している．座標依存性の例は，線素

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 \, d\phi^2 \tag{18.1}$$

をもつ 2 次元ユークリッド空間である．ある座標変換を行い，それが計量テンソルを**大域的に** $g_{ik} = \delta_{ik}$ にするときは，空間は厳密にユークリッド的である．このような変換を通じて $g_{ik} = \eta_{ik}$ になる場合はミンコフスキー空間を問題としている．そしてどちらの場合も空間は平坦である．一方，どのような変換でもデカルト（またはミンコフスキー）座標にならないということが，曲がった空間を特徴づける．曲がった空間の例は，計量

$$ds^2 = a^2 \, d\theta^2 + a^2 \, \sin^2\theta \, d\phi^2 \tag{18.2}$$

をもつ 2 次元球面である．ここで $\theta$ と $\phi$ は通常の角座標であり，$a$ は定数のパラメターである．曲がった空間は(18.2)のように有限のこともあり，たとえば双曲面の 2 次元空間のように無限のこともある．

座標に依存した，与えられた計量テンソル $g_{ik}(x)$ からは，デカルト座標への変換が可能かどうかは簡単には識別できない．しかし，$g_{ik}(x)$ から曲率テンソルを計算することはできる．そして，このテンソルがゼロになるときは，空間はまさに平坦である．

曲率テンソルを求めるに先立って，まず差 $A_{i\|k\|p} - A_{i\|p\|k}$ を調べることから始める．この際，これから詳細に述べるように，場 $A_i$ の偏微分関数はすべて互いに打ち消される．たとえば，$A_{i|k|p} - A_{i|p|k} = 0$ となり（$A_i(x)$ の連続微分可能性が仮定されている)，ベクトル場 $A_i$ に関して線形な項だけが残る．よって考えている差は次の形になる．

$$A_{i\|k\|p} - A_{i\|p\|k} = -R^m{}_{ikp}\, A_m \tag{18.3}$$

左辺はテンソルであり $A_m$ はベクトルであるので，これからテンソル $R^m{}_{ikp}$ が定義される．ところで

$$\text{曲がっていない空間に対して} \qquad R^m{}_{ikp} = 0 \tag{18.4}$$

であるので，このテンソルは**曲率テンソル**という名前をもつ．(18.4)を確かめてみよう．平坦な空間ではデカルト座標を取ることができる．これに対しては，(18.3)の左辺は単に $A_{i|k|p} - A_{i|p|k} = 0$ となる．よって $R^m{}_{ikp} = 0$ が成り立つ．$R^m{}_{ikp}$ はテンソルなので，これはまた任意の（平坦な空間の）座標系で成り立つ．これに反して曲がった空間では，テンソル $R^m{}_{ikp}$ はゼロにはならないことが以下に示される．

次の式

$$A_{i\|k} = A_{i|k} - \Gamma^m_{ik}\, A_m\,, \qquad T_{ik\|p} = T_{ik|p} - \Gamma^m_{ip}\, T_{mk} - \Gamma^m_{kp}\, T_{im} \tag{18.5}$$

の助けを借りて(18.3)を計算すると

$$\begin{aligned} A_{i\|k\|p} = A_{i\|k|p} - \Gamma^m_{ip}\, A_{m\|k} - \Gamma^m_{kp}\, A_{i\|m} &= A_{i|k|p} - \Gamma^m_{ik|p}\, A_m - \Gamma^m_{ik}\, A_{m|p} \\ &\quad -\Gamma^m_{ip}\, A_{m|k} - \Gamma^m_{kp}\, A_{i|m} + \Gamma^m_{ip}\, \Gamma^r_{mk}\, A_r + \Gamma^m_{kp}\, \Gamma^r_{im}\, A_r \end{aligned} \tag{18.6}$$

を得る．右辺の第 1 項と，（第 3 項+第 4 項），第 5 項と第 7 項は $k$ と $p$ とに関して対称であり，それらは(18.3)の差を作る際に打ち消しあう．そして第 2 項と第 6 項のみが残る．よって

$$A_{i\|k\|p} - A_{i\|p\|k} = -\left(\Gamma^m_{ik|p} - \Gamma^m_{ip|k} + \Gamma^r_{ip}\, \Gamma^m_{rk} + \Gamma^r_{ik}\, \Gamma^m_{rp}\right) A_m \tag{18.7}$$

となって，(18.3)に仮定された形が確かめられた．そしてこれから

$$R^m{}_{ikp} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{ik}\,\Gamma^m_{rp} - \Gamma^r_{ip}\,\Gamma^m_{rk} \tag{18.8}$$

が得られる．デカルト座標に対しては，クリストッフェル記号はゼロになるから，これからすぐに(18.4)が出てくる．(18.7)の左辺のために，右辺はテンソルでなければならない． $A_m$ はベクトルであるから $R^m{}_{ikp}$ はテンソルである．

われわれは次のことを示すことができる([文献 1] の 6.2 節)．すなわち $R^m{}_{ikp}$ は, 計量テンソルとその 1 階導関数と 2 階導関数から作り出され，さらに 2 階導関数については線形であるような**唯一の**テンソルである．それを示すために局所デカルト座標のある点（そこでは $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot} = 0$ である）を選び, $\partial\,\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}/\partial\,x^{\cdot}$ の変換様式を書き下し，テンソルのように変換するその導関数の線形結合を作る．これは(18.8)の最初の 2 項を定める．他の項は，求める量はテンソルであるという要請から出る．

式(18.8)から出る次の縮約もまたテンソルであり，**リッチ**(Ricci)・**テンソル**

$$R_{ip} = R^m{}_{imp} = g^{km}\,R_{kimp} \tag{18.9}$$

と次の**スカラー曲率**を与える．

$$R = R^i{}_i = g^{ik}\,R_{ik} \tag{18.10}$$

一方，$R_{imkp} = -R_{mikp}$ であるので縮約 $R^i{}_{ikp} = g^{im}\,R_{imkp} = 0$ が出る[6]．

さて $R_{mikp} = g_{ms}\,R^s{}_{ikp}$ を計量テンソルの 2 階導関数を使って具体的に書き表すことにしよう．そのために, われわれは(18.8)のなかの導関数 $\partial\,\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}/\partial\,x^{\cdot}$ にクリストッフェル記号の定義を代入する．少々の計算(演習 18.1) の後，われわれは次の式を得る．

---

[6] 訳注：(18.13)を使う．

$$R_{mikp}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^i\,\partial x^p}+\frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^m\,\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^m\,\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^i\,\partial x^k}\right)$$
$$+g_{rs}\left(\Gamma^r_{km}\Gamma^s_{ip}-\Gamma^r_{pm}\Gamma^s_{ik}\right)\qquad \text{曲率テンソル} \tag{18.11}$$

この形から次の対称性を読み取ることができる．

$$R_{mikp}=R_{kpmi} \tag{18.12}$$

$$R_{mikp}=-R_{imkp}=-R_{mipk}=R_{impk} \tag{18.13}$$

$$R_{mikp}+R_{mpik}+R_{mkpi}=0 \tag{18.14}$$

独立な成分 $R_{mikp}$ の数は次の考察からわかる．すなわち，反対称性(18.13)のために，どの二重添字の組 $(mi)$ または $(kp)$ も正確に $M=N(N-1)/2$ 個の独立な組を取ることができる．(18.12)よりこの二重の添字に関して，$R_{mikp}$ は要素の数

$$\frac{M(M+1)}{2}=\frac{N(N-1)(N^2-N+2)}{8} \tag{18.15}$$

をもつ対称な $M\times M$-行列となる．このとき(18.12)と(18.13)が考慮されている．さらに，従属している項を減らす条件を得るために(18.14)の各項を次の式

$$R_{mikp}$$
$$=\frac{1}{8}\left(R_{mikp}-R_{imkp}-R_{mipk}+R_{impk}+R_{kpmi}-R_{kpim}-R_{pkmi}+R_{pkim}\right) \tag{18.16}$$

に従って置き換える．すると，4 個の添字がすべて異なっており，しかもその並び方も異なっている項を $3\cdot 8=4!$ だけ得る．その際，どの二つの添字の置換もこの和に負符号を与えるので，この和は 4 個の添字に関して完全反対称となる．そのために四つの添字がすべて異なっている場合には，(18.14)は $R_{mikp}$ に対する補助条件となる．次の式

$$\binom{N}{4} = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-4)!\,4!} & (N \geq 4) \\ 0 & (N < 4) \end{cases} \tag{18.17}$$

は，$N$ 個の数字から四つの異なった添字を選ぶ場合の数を与える．このような選択に対して，(18.14)は項の数を減らす条件を与える．すなわち

$$c_N = \frac{N(N-1)(N^2-N+2)}{8} - \binom{N}{4} = \frac{N^2(N^2-1)}{12} \tag{18.18}$$

が独立な成分の数となる．$N < 4$ に対しては，すぐ前の表式が直接に証明できる．$N \geq 4$ に対しては，(18.17)の上の行を入れて書きなおす．(18.18)から

$$c_1 = 0\,, \qquad c_2 = 1\,, \qquad c_3 = 6\,, \qquad c_4 = 20 \tag{18.19}$$

がわかる．ある曲線 ($N = 1$) に対しては，そのうえに座標 $x$ として長さを選ぶことができ，$ds^2 = dx^2$ となる．このとき，$g_{11} = 1$ であって曲率テンソルは存在しない ($c_1 = 0$)．この際，より高次元空間で曲線の**外的な**曲率を求めてみても何の役にも立たない．というのは，線上の距離はそれを曲げても捻っても変わらないから，今考えている曲率テンソルには影響を与えない．ここで考えた計量 ($g_{ik}$) だけから与えられる曲率を**内的**な曲率とも呼ぶ[7)]．

今，特に 2 次元空間を考えよう．添字は 1 と 2 とを取る．(18.13)のゆえに，前二つの添字の組は異なった数字の組でなければならないし，後ろ二つの組に対しても同じことが言える．このことから，ゼロにならない要素は次のものだけである．

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} \tag{18.20}$$

かくして $N = 2$ に対しては曲率テンソルはたった一つの量から決められる，すなわち $c_2 = 1$．これは

$$R_{mikp} = (g_{mk}\,g_{ip} - g_{mp}\,g_{ik})\,\frac{R_{1212}}{g} \tag{18.21}$$

7) 訳注：13 節参照

と書けて，$g = g_{11}\,g_{22} - g_{21}\,g_{12} = \det(g_{ik})$ である．(18.21)は(18.20)を満足し，そして右辺は $m = i$ あるいは $k = p$ のときにゼロになることが容易にわかる．(18.21)からリッチ・テンソル

$$R_{ip} = g^{km}\,R_{mikp} = g_{ip}\,\frac{R_{1212}}{g} \tag{18.22}$$

と次のスカラー曲率が出てくる．

$$R = \frac{2\,R_{1212}}{g} \tag{18.23}$$

例として球面を考える．われわれは通常の角座標 $x^1 = \theta$ と $x^2 = \phi$ とを使う．線素(18.2)から計量テンソルは

$$(\,g_{ik}\,) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\,\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{18.24}$$

となる．ゼロにならない導関数は

$$\frac{\partial\,g_{22}}{\partial\,x^1} = 2\,a^2\,\sin\theta\,\cos\theta \tag{18.25}$$

だけである．これを使うと，添字 (2, 2, 1) をもつクリストッフェル記号だけがゼロにならない．ここで(18.11)を計算する．

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\,g_{22}}{\partial\,x^1\,\partial\,x^1} + g_{rs}\,(\varGamma^r_{11}\,\varGamma^s_{22} - \varGamma^r_{12}\,\varGamma^s_{12}) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial\,\theta^2} - g_{22}\,(\varGamma^2_{12})^2 \\ &= -a^2\,\sin^2\theta \end{aligned} \tag{18.26}$$

上の式には，$\partial^2 g_{22}/\partial\,\theta^2 = 2\,a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ と，$\varGamma^2_{12} = \cot\theta$ とが代入された．$g = a^4\,\sin^2\theta$ を使うと最終的に次の式を得る．

$$R = \frac{2\,R_{1212}}{g} = -\frac{2}{a^2} \qquad \text{(球面)} \tag{18.27}$$

3 次元空間における 2 次元面の曲がりは，二つの主曲率 $\rho_1$ と $\rho_2$ とで局所的に書き表される．演習 18.2 に，**ガウスの曲率** $K$ がスカラー曲率 $R$ と

$$K = \frac{1}{\rho_1\,\rho_2} = -\frac{R}{2} \tag{18.28}$$

のように関連していることが示されている．曲率半径は面の内的および外的な曲がりを定める．例として，$\rho_1 = \rho_2 = a$ をもつ球面と $\rho_1 = \rho_2 = \infty$ をもつ平面を取ろう．平面は，曲率半径のどちらかを無限大のままにして，曲げて円筒にできる．よってスカラー曲率はゼロのままである．面の計量は，このような曲げによっては変わらない．たとえば1枚の紙を取り上げ，そのうえにデカルト座標の線を描いたとする．3次元でその紙面を丸めたとき，2次元空間の内部では計量は変化しないことは明らかである．この丸めは外的な曲がりだけに関係していて内的な曲がりには関係しない．

球面に対してはデカルト座標は存在しないというこの章の導入部の記述を，もう少し一般的に言い表すと

$$R^i{}_{kpm} \neq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{デカルト座標系なし} \tag{18.29}$$

となる．すなわち，曲率テンソルがゼロにならないということは，デカルト座標系が存在しないということと同等である．矢印 → は，デカルト座標系が存在するということは前提 $R^i{}_{kpm} \neq 0$ と矛盾するということを示している[8)]．なぜなら，デカルト座標系では $R^i{}_{kpm} = 0$ のはずである．このことは，$R^i{}_{kpm}$ はテンソルなので任意の座標系で成り立つことになる．矢印 ← では，$R^i{}_{kpm} = 0$ のときはデカルト座標が可能であるということが示されている．そうするには，まず与えられた座標からある点で**局所**デカルト系になるような変換を行う．この点では $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot} = 0$ である．$R^i{}_{kpm} = 0$ であるので，さらに $\partial\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}/\partial x^{\cdot} = 0$ が成り立ち，したがって，局所デカルト座標系は大域的なデカルト座標系につなげることが可能である．

---

[8)] 訳注：以下，対偶を使って説明している．

## 演習

18.1:

$$R^m{}_{ikp} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^m_{rp} - \Gamma^r_{ip}\Gamma^m_{rk}$$

から

$$R_{mikp} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^i \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^i \partial x^k}\right)$$

$$+ g_{rs}\left(\Gamma^r_{km}\Gamma^s_{ip} - \Gamma^r_{pm}\Gamma^s_{ik}\right)$$

を導け．そのためにまず

$$\frac{\partial g_{ms}}{\partial x^p} = g_{ns}\Gamma^n_{pm} + g_{nm}\Gamma^n_{ps} \tag{18.30}$$

と

$$g_{ms}\frac{\partial g^{sr}}{\partial x^p} = -g^{sr}\frac{\partial g_{ms}}{\partial x^p} \tag{18.31}$$

とを示せ．

18.2: スカラー曲率 $R$ とガウスの曲率 $K = 1/(\rho_1\,\rho_2)$ の間の関係を 2 次元面に対して求めよ．そのためには一般性を失うことなしに曲率半径 $\rho_1$ と $\rho_2$ を使った面

$$z = \frac{x^2}{2\,\rho_1} + \frac{y^2}{2\,\rho_2}$$

を使うことができる．面の内部の計量 $ds^2 = g_{11}\,dx^2 + g_{22}\,dy^2 + 2\,g_{12}\,dx\,dy$ を定め，そして $g_{ik}$ からスカラー曲率 $R$ を計算せよ．

# V　一般相対性理論の基礎法則

## 19　共変原理

等価原理から出発して共変原理を作り上げることにする．重力を含む物理法則はよく知られた特殊相対論から導出されるが，この共変原理はその際の一つの手法である．われわれは 3 次元のユークリッド空間とミンコフスキー空間における類似の手法から始める．

デカルト座標系 KS′ で，$x'$-軸に平行な電場 ($\boldsymbol{E} = E'_x\, \boldsymbol{e}'_x$) に対して次の方程式

$$\frac{\partial\, E'_x(\boldsymbol{r})}{\partial\, x'} = 4\,\pi\varrho_e(\boldsymbol{r}) \tag{19.1}$$

が成り立っているものとする．それでは，任意の方向の $\boldsymbol{E}$ に対してこの表現はどのようになるだろうか？ 空間は等方であるとしよう．そうすれば基本的な法則は，3 次元ユークリッド空間内においては回転した座標系でも共変であるように定式化されなければならない．このためにわれわれは 3 元テンソルを導入するが，それらは直交変換（回転）のもとでの変換特性によって定義される．(19.1) の $\varrho_e$ は 3 元スカラーであり，一方 $\partial/\partial x$ と $E_x$ は 3 元ベクトルの第 1 成分であるので，(19.1) の自然な一般化は

$$\partial_i\, E^i(\boldsymbol{r}) = 4\,\pi\varrho_e(\boldsymbol{r}) \tag{19.2}$$

である．この一般化の妥当性は次の考察から与えられる．今，ある点 $\boldsymbol{r}$ の近傍を考え，場が $\boldsymbol{e}'_x$ に平行になるようにデカルト座標 KS′ を選ぶ．(19.2) は直交変換では形を変えない．この式は局所的に (19.1) の形になり，上の前提

によってそれは正しい．点 $\boldsymbol{r}$ は任意であり，微分方程式は局所的な記述であるから，(19.2)は一般に成り立つ．

われわれは法則を作り上げる際の規則を，等方性の前提を使って一般的に得ることができる．すなわち，求めている方程式は次の条件を満たさなければならない．

- 直交変換に対して共変．
- ある特別な座標系で成り立つこと．

デカルト座標の代わりに別の任意の座標（たとえば球座標）を導入することを考える．すると方程式(19.2)は次のように，**座標に依存しない**形に書くことができることがわかる．

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 4\,\pi \varrho_e(\boldsymbol{r}) \tag{19.3}$$

ここでは，たとえば無限小の体積に対するガウスの定理のように，発散は座標に依存しないで定義されているものとしている．(19.3)の妥当性は次のことからわかる．

- 一般的な座標変換のもとで共変である．
- 特別な座標系に対して成り立つ（(19.2)のデカルト座標）．

われわれは特殊相対論の設定に際して，類似の枠組みの考察を使った．回転した座標系で法則が等価であるということは，いろいろな慣性系において等価ということである．ここで直交変換に対して共変である代わりに，ローレンツ変換に対して共変であることをわれわれは要請する．法則が正確であるためには，下記の二つの要請を満たさなければならない．

- ローレンツ変換（たとえば(4.4)）に対して共変．
- ある特別な慣性系 IS′（たとえば(4.1)）で成り立つ．

考えてきたすべての場合で，(直交変換，一般座標変換，ローレンツ変換それぞれに対しての）共変性は方程式の数学的な形から保証される．これまで考えてきた一般的な方程式は，極限ではよく知られたかたちに簡単化され，その極限形はしばしば（空間または時間について）局所的な表現になる．微分方程式に対しては，それは局所的な記述であるから，これで十分である．

一般相対性理論を確立するために同様の手法を使う．考えている場所の局所慣性系（たとえば衛星実験室）は，方程式がわかっている極限の系として役立つ．そして実際に使用したい座標系へ変換するのであるが，それは互いに加速している基準系の間の変換である．それは，形式的には 14 節で考察した一般座標変換の一つである．IV 章でわれわれは，どのように方程式を設定しなければならないかを考察したが，それによるとこのような一般座標変換のもとでは，方程式は**共変**（あるいはまた**一般共変**）であり，形式不変でなければならない．そのために，われわれは共変な量（リーマン・テンソル）と共変微分演算を導入した．これを使うと等価原理（10 節）から**共変原理**が出てくる．そして，重力場で成り立つ方程式は次の条件から定められる．

1. 一般座標変換のもとで共変．このことは，法則はリーマン・テンソル方程式の形をもたなければならないということを意味している．
2. 局所慣性系で成り立つ．このことは，対応する特殊相対論の法則が $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ を代入することによって得られなければならないことを意味する．

いまや $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ である基準系が局所的に実現できる．たとえば，これは衛星実験室で局所的に重力を消すことによって可能である．これと同様に，相対論的運動方程式をニュートンの極限へ導くことは（時間的な意味で）局所的に可能である．というのは，加速されている質点と瞬間的に等速で動く慣性系がある時間に存在するからである．

10 節で，重力を含む相対論を等価原理から設定するために次のような図式を得た．

| 重力を含まない特殊相対論の法則 | $\xrightarrow[\text{変換}]{\text{座標}}$ | 重力を含む相対論の法則 |
|---|---|---|

特殊相対論の法則を一般共変の形に書くことで，一般座標変換をその法則に（苦労して）適用するのを避けることができる．その後，もはや座標変換してその形を変えなくてよい．それはすでに重力を含む求める相対論の法則を表しており，このやり方は共変原理と呼ばれている．等価原理はこの手法の基礎を成している物理的な仮定であり，以前の例における空間の一様性の仮定，

あるいはアインシュタインの相対性原理と同等の仮定である．

## リーマン・テンソルの定義

まず最初に，よく知られたローレンツ・テンソルがいかにしてリーマン・テンソルに対応させられるのかを示すことにする．これは共変原理の適用に際しての最初の一歩である．

一般相対論では，座標 $x^\mu$ をもつ 4 次元リーマン空間から出発する．空間のどの点でも局所慣性系の座標 $\xi^\alpha$ への座標変換 $x^\mu = x^\mu(\xi)$ が存在する．局所ミンコフスキー空間では添字を $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ で示すが，リーマン空間では添字を $\mu, \nu, \lambda, \cdots$ で示す．そして，すべてのギリシャ文字の添字は $0, 1, 2, 3$ をとる．

座標変換 $x^\mu = x^\mu(\xi)$ は，ローレンツ・ベクトル $d\xi^\alpha$ とリーマン・ベクトル $dx^\mu$ との間の関係を定める．

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\, d\xi^\alpha \quad \text{および} \quad d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\, dx^\mu \tag{19.4}$$

われわれはこれを線素に代入する．

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{19.5}$$

すると次の計量テンソルを得る．

$$\boxed{g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}} \tag{19.6}$$

この結果はすでに知られた(11.6)である．これはリーマン・テンソル $g_{\mu\nu}$ とローレンツ・テンソル $\eta_{\alpha\beta}$ の関係を与える．そして線素 $ds$ は，ローレンツ・スカラーであると同時にリーマン・スカラーでもある．

(19.4)と同じように，どのローレンツ・ベクトル $A^\alpha$ も

$$\boxed{A^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\, A^\alpha \qquad \text{リーマン・ベクトルの定義}} \tag{19.7}$$

のように，リーマン・ベクトル $A^\mu$ に割り当てられる．$A^\mu$ が実際，リーマン・ベクトルであることは次のようにして示せる．

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} A^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\alpha}} A^{\alpha} = \alpha^{\mu}_{\nu} A^{\nu} \tag{19.8}$$

$\alpha^\mu_\nu$ （およびその逆の量 $\bar{\alpha}^\mu_\nu$）は(14.10)で定義される．共変ベクトルに対しては次の関係が成り立つ．

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\gamma}} A^{\gamma} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} A_{\alpha} \tag{19.9}$$

リーマン・テンソルはベクトルと同様に定義される．たとえば

$$F^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} F^{\alpha\beta}, \qquad F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} F_{\alpha\beta} \tag{19.10}$$

ローレンツ・スカラー（たとえば $ds$）は同時にリーマン・スカラーである．そして，ローレンツ・スカラー場 $S(\xi)$ はリーマン・スカラー場 $S(x)$ となる．

$$S(x^0, \ldots, x^3) \equiv S(\xi^0(x), \ldots, \xi^3(x)) \tag{19.11}$$

この引数の変化は，テンソル場を考えるときは(19.7)と(19.10)でもそれぞれ起こる．ところで，$S(x)$ は $S(\xi)$ のように引数が違う関数であるので，実際を言えば別の文字を使うべきであろう．しかし物理学における慣習に従って，書き方に区別をつけるのは止める．

（座標 $x$ または $x'$ をもつ）異なった座標系は，（$\xi$ をもつ）局所慣性系に座標変換（$\xi(x)$ あるいは $\xi(x')$）によって結びつけられる．これによって，リーマン・スカラー場(19.11)の変換特性が次のように与えられる．

$$S'(x') = S(\xi(x')) = S(\xi(x'(x))) = S(\xi(x)) = S(x) \tag{19.12}$$

ここで定義されたリーマン・テンソルに対して，Ⅳ章で与えられた規則が成り立つ．特に，それは計量テンソルの添字の上げ下げや，変換特性，新しいテンソルの作成，テンソル場の微分に関しても同じである．

## 重力場中の運動

共変原理の応用として，まず重力場中の粒子の運動を考えよう．ミンコフスキー座標 $\xi^\alpha$ をもつ局所慣性系で

$$\frac{d\,u^\alpha}{d\,\tau} = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\,\tau^2} = 0 \qquad \text{局所慣性系} \tag{19.13}$$

が成り立つ．ここで $d\,\tau = d\,s/c$ である．局所慣性系の例は，粒子の位置 $\xi^\alpha$ にある自由落下の衛星実験室である．(19.13)が成り立つことは等価原理において仮定されていて，それは重力と慣性力の等価性に基づいている．さて共変原理に従って共変方程式を設定するが，それは $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ とすれば(19.13)に帰着しなければならない．

次の式

$$u^\mu \equiv \frac{\partial\,x^\mu}{\partial\,\xi^\alpha}\,u^\alpha = \frac{d\,x^\mu}{d\,\tau} \tag{19.14}$$

によって，4 元速度 $u^\alpha$ に対応したリーマン・ベクトルを定義する．運動方程式の設定のためには $u^\mu$ を微分しなければならない．共変微分

$$D\,u^\mu = u^\mu{}_{\|\nu}\,d\,x^\nu = d\,u^\mu - \delta\,u^\mu = u^\mu{}_{|\nu}\,d\,x^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,u^\nu\,d\,x^\lambda \tag{19.15}$$

はリーマン・ベクトルである．しかし $d\,u^\mu$ はそうではない．共変かつ一般化された(19.13)は

$$\frac{Du^\mu}{d\,\tau} = 0 \tag{19.16}$$

となる．これはまた $Du^\mu/\,D\tau = 0$ と書くことも多い．この方程式は共変であり， $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ とすれば(19.13)になるという意味で共変原理を満足している．よって，(19.16)は重力場における運動を正確に記述している．くわしく書けば，この方程式は

$$\boxed{\frac{d\,u^\mu}{d\,\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,u^\nu\,u^\lambda \qquad \text{重力場における運動}} \tag{19.17}$$

となる．11 節では，一般座標変換を(19.13)に具体的に代入していまの結果を得ている．それと比較すれば，(IV 章で導入された数学も含めて) 共変原理は重力を含む法則の設定を**非常に簡単化する**ということがわかる．われわれが複雑な法則を考えるとき，この方法は実際になくてはならないものである．

## ビアンキの恒等式

次の共変な方程式は**ビアンキ**(Bianchi)**の恒等式**と呼ばれる.

$$R_{iklm\|n}+R_{ikmn\|l}+R_{iknl\|m}=0 \tag{19.18}$$

このリーマン・テンソル方程式は後々必要となるのでここでこれを証明するが，その手法は以下のように共変原理と同じである.

座標 $x_0=(x_0^0,\,x_0^1,\,x_0^2,\,x_0^3)$ をもつ，任意ではあるが確定した点 P を考える．そして線素を $\xi'^{\nu}=x^{\nu}-x_0^{\nu}$ のべき級数で展開する.

$$ds^2=g_{\mu\nu}(x_0)\,d\xi'^{\mu}d\xi'^{\nu}+\cdots=\delta_{\mu\nu}\,d\xi^{\mu}d\xi^{\nu}+\cdots \tag{19.19}$$

$g_{\mu\nu}(x_0)=\mathrm{const.}$ であるから空間は局所的に平坦で[1)]，デカルト座標 $\xi^{\nu}$ への変換 ($\xi'^{\nu}\to\xi^{\nu}$) が存在する．(座標 $\xi^{\nu}$ をもつ) その局所的な座標系 $\mathrm{KS}_0$ では， $\Gamma^i_{kl}=0$ が成り立つ．これと(18.11)から次の式が出る.

$$R_{iklm\|n}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\,\xi^n}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial\xi^k\,\partial\xi^m}+\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial\xi^i\,\partial\xi^l}-\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial\xi^i\,\partial\xi^m}-\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial\xi^k\,\partial\xi^l}\right)\qquad \mathrm{KS}_0\text{で} \tag{19.20}$$

第 1 項と第 4 項は $(\partial^3 g_{il}/\,\partial\xi^k\,\partial\xi^m\,\partial\xi^n-\partial^3 g_{im}/\,\partial\xi^k\,\partial\xi^n\,\partial\xi^l)/2$ となる．(19.18)では，添字 $l,m,n$ に関して循環的な和（もともとの項 $+(lmn\to mnl)+(lmn\to nlm)$）となっている．結果として，六つの項（三つの第1項と三つの第4項）のうち二つずつが打ち消し合う．このことは，(19.20)の第2項と第3項の組に対しても同様に成り立つ．かくして具体的にこれらを代入することによって

$$R_{iklm\|n}+R_{ikmn\|l}+R_{iknl\|m}=0\qquad \mathrm{KS}_0\text{で} \tag{19.21}$$

がわかる．これに関しては一般座標変換を行うことができる．そして結果の方程式は同じ形になる．さて， P の近傍の任意の座標に対して(19.18)は成り立つ．ここでの議論は空間のどの点 P に関しても繰り返すことができるので，(19.18)は一般に成り立つ.

---

1) 訳注：13 節，式(13.18)の上方の訳注参照.

## まとめ

われわれはこの節で，物理法則を作り上げるための一般原理として次の条件を定めた．

1. 法則は決まった変換（直交変換，ローレンツ変換，一般座標変換）に対して共変である．この要請は物理的な対称性の前提（空間の等方性，相対性原理，等価原理）に基づいている．
2. 方程式はよく知られた極限（たとえば，定まった方向をもつ基準系，瞬間的な静止系，局所慣性系）で正確であり，その極限は対応した変換を通して一般的な場合に結びつけられる．

この並行的な構造を表 19.1 にまとめてある．二つの対称性原理（空間の等方性，時空の相対性）は特殊相対論の法則（方程式の形だけでなく，その内容もローレンツ変換のもとで不変である）を導くが，等価原理はある一点でこの二つの対称性原理と区別される．すなわち，$\boldsymbol{v}$ をもつローレンツ変換を受けるマクスウェル方程式は $\boldsymbol{v}$ に依存しない（または回転変換の際の回転角に依存しない）が，一般相対論では，このことは方程式の**形**に対してだけ成り立つ．それで，たとえば(19.16)の形は一般座標変換の後にも変わらないし，

**表 19.1**: 対称性を使って整理した並行性．ここで考えている対称性原理（最初の縦列）は，いろいろな基準系の等価性についての仮定である．ある空間内の異なった基準系の間の変換（2 番目の縦列）は，線素の形(14.16)を変えない．物理法則は，これらの変換で形式不変（共変）であるように定式化される．そのためにテンソルが導入される（3 番目の縦列）．これらは添字の付いた量であり，それぞれの添字に関して座標微分のように変換される．ある物理法則が有効になるためには，それは共変でなければならず，ある特別な基準系（第 4 縦列で与えられている極限）で成り立たなければならない．

| 対称性原理 | 変換 | テンソル | 極限 |
|---|---|---|---|
| 空間の等方性 | 直交変換 | 通常のベクトル，3 －テンソル | 特別な方向の軸をもつ基準系 |
| 時空の相対性 | ローレンツ変換 | ローレンツ・または 4 －テンソル | 瞬間的な静止系 |
| 等価原理 | 一般座標変換 | リーマン・テンソル | 局所慣性系 |

新しい系 KS′ でも $Du'^{\mu}/d\tau = 0$ が成り立つ．しかしながら，実際の内容はほどこされた変換に依存する．ここで考えられている基準形（特に局所慣性系や $g_{\mu\nu}$ をもつ座標系）は相対的に加速されており，**物理的には等価ではない**．異なった慣性系では物理的効果は等しいが，たとえば慣性系と回転している座標系とではそれは等しくない．このように考えると，特殊相対性理論の類推で作り出された言葉，一般相対性理論は再考されるべきであろう．

物理法則の設定に使用する原理として，共変原理は相対性原理と同じ構造をもっている．最後にそれをもう一度定式化しよう．

- **共変原理**：重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ のもとでの物理法則は共変な方程式であり，それは重力場がなければ（すなわち $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ に対しては）特殊相対論の法則になる．

# 20 重力を入れた法則

共変原理を使って，よく知られた重力がない相対性理論を，重力を含んだ理論に一般化する．II章で示された力学，電気力学，そして流体力学の諸法則を再度考察する．

## 力学

前節に重力場中の粒子の相対論的運動方程式がすでに与えられている．ここではそれに加えて，重力以外の応力も取り入れることにする．さらに，粒子の固有回転運動量（スピン）の変動も調べることにする．

慣性系では，次の特殊相対論の運動方程式(4.4)が成り立つ．

$$m\,\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \qquad \text{慣性系} \tag{20.1}$$

等価原理によって，この方程式は局所慣性系でもまた成り立つ．ミンコフスキー力 $F^\alpha$ は電磁力 $(q/c)\,F^{\alpha\beta}\,u_\beta$ であってもよい．（電磁場テンソルも普通の応力も，同じように一般的に活字 $F$ で表される．しかし，添字の数が違うので混同する恐れはない）．局所慣性系では重力は消えるので，$F^\alpha$ は重力を含んでいない．われわれは(19.7)に従って，ローレンツ・ベクトル $F^\alpha$ をリーマン・ベクトル $F^\mu$ に関係づける．

$$F^\mu \equiv \frac{\partial\, x^\mu}{\partial\, \xi^\alpha}\, F^\alpha \tag{20.2}$$

(20.1)の共変的一般化は次のとおりである．

$$m\,\frac{Du^\mu}{d\tau} = F^\mu \tag{20.3}$$

くわしい表記

$$\boxed{m\,\frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu - m\,\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,u^\nu\,u^\lambda \qquad \text{運動方程式}} \tag{20.4}$$

では, 右辺に重力 $-m\,\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,u^\nu\,u^\lambda$ が具体的に現れる．方程式(20.4)は共変原理を考えれば正しいことがわかる．というのは

- それは共変である.
- それは $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ に対しては(20.1)になる.

(20.1)の $u^\alpha$ の 4 成分はすべてが独立というわけではなく，次の関係が成り立つ.

$$\eta_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta = u^\alpha\, u_\alpha = c^2 \qquad \text{慣性系} \tag{20.5}$$

この方程式は，共変原理に従えば次のようになる.

$$\boxed{g_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu = u^\mu\, u_\mu = c^2 \qquad \text{速度に関する付加条件}} \tag{20.6}$$

(20.3)のどんな解に対しても $g_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu$ =const. が成り立つ（演習 20.1）. よって，初期条件 $u^\mu(\tau = 0)$ は(20.6)が満たされるように選べばそれで十分である．したがって，(20.6)は具体的に考慮しなければならないものではない.

$u^\mu(\tau) = d\,x^\mu/\,d\,\tau$ から積分によって軌道 $x^\mu(\tau)$ が得られる． $x^0(\tau) = c\,t$ から $\tau = \tau(t)$ を求め，それを $x^i(\tau)$ に代入すると実際の軌道 $x^i(t)$ が出る. この際，$x^0 = ct$ が時間座標を意味していると仮定している． $x^\mu$ をもつ座標系にある時計の時刻と $t$ との間の関係は 12 節に規定してある.

## スピンの運動

後の応用のために，粒子がスピン $\boldsymbol{s} = s^i\, \boldsymbol{e}_i$ と呼ばれる古典的な回転運動量をもっている場合を考えよう．このスピン・ベクトル $s^i$ をローレンツ・ベクトル $s^\alpha$ に関連づけることにする．そのために考えている粒子と瞬間的に等速となる慣性系 IS′（瞬間的な静止系）に移り，そこで次の定義をする.

$$(s'^\alpha) = (0,\, s'^i) \qquad \text{瞬間的静止系 IS}' \tag{20.7}$$

これから，任意の慣性系 IS でのスピン・ベクトル $s^\alpha$ がローレンツ変換で得られる[2)]．今の静止系では $(u'_\alpha) = (c,\, 0)$ である．よって

$$u'_\alpha\, s'^\alpha = 0 \qquad \text{瞬間的静止系 IS}' \tag{20.8}$$

[2)] 訳注：ここで $s^0$ という量が導入される．スピン・ベクトルをローレンツ・ベクトルにするために(20.7)の定義をするのであるが，その際必然的に入ってくる量が $s^0$ である.

これはローレンツ・スカラーであるから

$$u_\alpha s^\alpha = 0 \tag{20.9}$$

が任意の慣性系で成り立つ.

われわれはまず外力なしの場合を考える．この場合，いかなるトルクもスピンに働いておらず，またいかなる力も粒子に働いていない．静止系 IS′ では

$$\boldsymbol{s}' = (s'^1, s'^2, s'^3) = \text{const.} \qquad (\text{外力なし}) \tag{20.10}$$

が成り立つ．このことは， $ds'^i/dt = 0$ そして $ds'^\alpha/d\tau = 0$ を意味する．任意の慣性系への変換は

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} = 0 \qquad (\text{外力なし}) \tag{20.11}$$

となる．(19.7) に従って，われわれはリーマン・ベクトル $s^\mu \equiv (\partial x^\mu/\partial \xi^\alpha)\, s^\alpha$ を定義する．共変原理に従うと (20.11) は $Ds^\mu/d\tau = 0$ となり

$$\boxed{\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, u^\nu\, s^\lambda \qquad \text{重力場における スピン}} \tag{20.12}$$

となる．この運動方程式は，重力場におけるスピン・ベクトルの**回転**あるいは**歳差**[3]を表している．

条件 (20.9) は $u_\mu\, s^\mu = 0$ となる．(20.12) からスピン・ベクトルの大きさが保存される ($s^\mu\, s_\mu$ =const.) ということがわかるが，これは演習 20.1 で示される．

(20.12) を導出する際には，局所慣性系では粒子には外力は働いていないと仮定した．すなわち，(20.12) では重力だけを考慮した．したがって，方程式は重力場で自由落下している粒子のスピンの歳差を記述している．たとえば，この式で衛星に乗っているコマの軸の歳差を取り扱うことができる．

スピンには（瞬間的な静止系では）何らのトルクも働かないとすると，次のいくつかの場合を考えることができる．

[3] 訳注：大きさ一定の角運動量ベクトルが時間とともに方向だけを変えるとき，それを歳差または歳差運動という．

1. 重力場のなかの粒子(20.12).
2. 重力場以外の外場にある粒子(トーマス歳差).
3. 重力場に加えて他の外場にある粒子(フェルミ移動).

続く節では最初の場合だけが必要である．しかし念のために，他の場合の運動方程式も与えることにする．

## トーマス歳差

(20.1)によれば，力 $F^\alpha$ の影響を受けている粒子に対して

$$m\,\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \tag{20.13}$$

が成り立つ．このとき，$F^\alpha$ はたとえばクーロン力であり，その力のもとでスピン $s^\alpha$ をもつ古典的な電子が運動しているとする．(20.13)は慣性系 IS または局所慣性系で成り立つ．ここで慣性系 IS に相対的に一定速度で動いている慣性系 IS′ を導入しよう．そして，この系では瞬間的に粒子は静止するものとする．慣性系 IS′ ではスピンにトルクは働かない．ゆえに

$$\frac{d\boldsymbol{s}'}{dt} = 0 \qquad \text{慣性系 IS}' \tag{20.14}$$

となる．ここでやっていることは，外場 $F^\alpha$ にある粒子の加速度運動によって引き起こされるスピンの変動を調べることである．慣性系 IS′ では

$$\left(\frac{ds'^\alpha}{d\tau}\right) = \left(\frac{ds'^0}{d\tau},\, 0\right), \qquad \left(u'^\alpha\right) = (c,\, 0) \tag{20.15}$$

である．基準系 IS へのローレンツ変換は $u^\alpha = \Lambda^\alpha_0\, c$ を生じ，さらに

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} = \Lambda^\alpha_0\,\frac{ds'^0}{d\tau} = \frac{u^\alpha}{c}\,\frac{ds'^0}{d\tau} = g(\tau)\,u^\alpha \tag{20.16}$$

を与える．ここで $g(\tau)$ はさし当たりは未知関数である．(20.16)に $u_\alpha$ を掛けて $\alpha$ に関して和を取る．これから $g(\tau) = (ds^\alpha/d\tau)u_\alpha/c^2$ が出る．(20.9)を $\tau$ で微分すると

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau}\,u_\alpha + s^\alpha\,\frac{du_\alpha}{d\tau} = 0 \tag{20.17}$$

となる．よって $g(\tau) = -(du_\alpha/d\tau)s^\alpha/c^2$ を得る．この $g(\tau)$ を(20.16)に代入すると

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{du_\beta}{d\tau}\,s^\beta\,u^\alpha \qquad \text{（トーマス歳差）} \tag{20.18}$$

を得る．これが加速されている $(du^\beta/d\tau \neq 0)$ 粒子のスピン歳差であり，**トーマス歳差**と呼ばれている．この場合，重力場は存在しない．このとき，粒子には（瞬間的な静止系では）トルクは働いていないと仮定されている．

トーマス歳差は，原子内電子のスピン運動に対してよく知られた効果をもたらす．速度 $\boldsymbol{v}$ で電子が動いていると，原子核のクーロン場 $\boldsymbol{E}$ は電子の静止系で磁場 $\boldsymbol{B}$ (IS′) $\approx -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}/c$ を生じる．この $\boldsymbol{B}$-場が磁気モーメント $\boldsymbol{\mu} = \text{const.}\cdot\boldsymbol{s}$ と相互作用してトルク $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}$ を引き起こす．トーマス歳差はこのトルクのために半分に減少する．

## フェルミ移動

さて外力 $F^\mu$ に加えて重力を取り入れることにする．局所慣性系で(20.18)が成り立ち，そして共変原理から

$$\frac{Ds^\nu}{d\tau} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{Du^\mu}{d\tau}\,s_\mu\,u^\nu \qquad \text{（フェルミ移動）} \tag{20.19}$$

が出る．これは加速されていて $(Du^\mu/d\tau \neq 0)$，さらに重力が働いている粒子のスピン歳差を記述している．この歳差はフェルミ移動と呼ばれている．

## 電気力学

等価原理によって，マクスウェル方程式(6.6)と(6.7)は局所慣性系で成り立つ．共変原理によって，これらの方程式は

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = \frac{4\pi}{c}\,j^\mu \qquad \text{そして} \qquad \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\,F_{\lambda\kappa\|\nu} = 0 \tag{20.20}$$

となる．(17.14)に現れている係数 $1/\sqrt{|g|}$ は省略されている．リーマン・テンソル $j^\mu$ と $F^{\mu\nu}$ の定義は(19.7)と(19.10)に従っている．

(20.20)によって，重力場におけるマクスウェル方程式が与えられる．重力場は共変微分の $\Gamma$ を通じて取り入れられている．他方，電磁場はエネルギー

の形で重力場の源となるので，それはまたアインシュタインの場の方程式(21節)に入っている．それゆえ，(20.20)とアインシュタインの場の方程式は原理的に場 $A_\mu(x)$ と場 $g_{\mu\nu}(x)$ の結合系を構成している．しかしながら，エネルギー密度に対する電磁場の寄与は関係している質量に比べると，たいていは無視することができる．したがって，マクスウェル方程式(20.20)の $g_{\mu\nu}$ は与えられた外力である．

$g_{\mu\nu}$ は重力場と選ばれた座標とに依存している．よって，(20.20)は曲線座標に対する正しいマクスウェル方程式を表しているし，ユークリッド空間（この場合は重力はない）の球座標に対してもそうである．面倒なベクトル方程式を特定の非デカルト座標で書き換えるときはマクスウェル方程式をこの形にすることが普通であり，かつ簡潔に解ける（これについては演習 17.1 も見よ）．

重力場中（あるいは曲線座標）のマクスウェル方程式は簡単化することができる．(15.19)に従うと

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = F^{\mu\nu}{}_{|\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\, F^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\rho}\, F^{\mu\rho} \tag{20.21}$$

が成り立つ．$\nu, \rho$ に関する $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ の対称性と $F^{\rho\nu}$ の反対称性のために，この二つの添字で和を取ると右辺の第 2 項は消える．(17.5)の助けを借りると

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = F^{\mu\nu}{}_{|\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\rho}\, F^{\mu\rho} = F^{\mu\nu}{}_{|\nu} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^{\nu}}\, F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\partial(\sqrt{|g|}\, F^{\mu\nu})}{\partial x^{\nu}} \tag{20.22}$$

を得る．これによって，非同次型のマクスウェル方程式は

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\partial(\sqrt{|g|}\, F^{\mu\nu})}{\partial x^{\nu}} = \frac{4\pi}{c}\, j^{\mu} \tag{20.23}$$

となる．同次型マクスウェル方程式も同様に簡単化される．まず(15.20)に従って共変微分を書き下す．

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\, F_{\lambda\kappa\|\nu} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\, \left(F_{\lambda\kappa|\nu} - \Gamma^{\rho}_{\kappa\nu}\, F_{\lambda\rho} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\, F_{\rho\kappa}\right) \tag{20.24}$$

クリストッフェル記号は下付の添字に関して対称であるから，レヴィ-チヴィタ記号を考慮すると $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ を含む項は消える．よって，同次型マクスウェル方

程式は特殊相対論のそれと同じ形である．すなわち

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa|\nu} = 0 \tag{20.25}$$

さて，外場にある質量と電荷をもつ粒子（質量 $m$，電荷 $q$）の運動方程式を与えよう．(6.12)の共変的一般化は

$$m \frac{Du^{\mu}}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_{\nu} \tag{20.26}$$

または

$$m \frac{du^{\mu}}{d\tau} = -m \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} u^{\nu} u^{\lambda} + \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_{\nu} \tag{20.27}$$

である．電磁力は電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ を通して表せるし，重力場の強さはクリストッフェル記号 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ で書き表される．これらの力はそれぞれのポテンシャル $g_{\mu\nu}$ と $A_{\mu}$ の微分として与えられる．

連続の方程式(6.3)は共変原理によって

$$j^{\mu}{}_{\|\mu} = 0 \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{\partial(\sqrt{g}\, j^{\mu})}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{20.28}$$

となる．

## エネルギー運動量テンソル

流体力学の基本法則は $\partial_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0$ の形に書き表せる．ここで $T^{\alpha\beta}$ はエネルギー運動量テンソルである．この式の一般共変方程式を考えよう．

リーマン・テンソル

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \left(\varrho + \frac{P}{c^2}\right) u^{\mu} u^{\nu} - g^{\mu\nu} P \qquad \text{エネルギー運動量テンソル}} \tag{20.29}$$

は完全流体のエネルギー運動量テンソル(8.1)に結びつけられる．$u^{\mu}$ と $g^{\mu\nu}$ の（リーマン）テンソル性はすでに議論された。圧力 $P$ と質量密度 $\rho$ は7節でローレンツ・スカラーとして定義された．そして，(19.11)によってリーマン・スカラー場がそれらに結びつけられる．

特殊相対論では，重力以外のすべてのエネルギー形態が(8.8)に示されるように，エネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ に寄与する．このことは関連しているリーマン・テンソルに対しても成り立つ．

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{(20.29)} + T^{\mu\nu}_{\rm em} + \cdots \tag{20.30}$$

慣性系では，（または局所慣性系でも）エネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ に対して(8.9)の保存則 ${T^{\alpha\beta}}_{|\beta} = 0$ が成り立つ．共変原理から(8.9)は

$${T^{\mu\nu}}_{\|\nu} = 0 \tag{20.31}$$

となる．これによって，たとえば重力場における流体の相対論的運動が記述される．重力場は共変微分の際の $\Gamma$ を通じて取り入れられる．（重力以外の）他の力は，(20.30)におけるそれぞれの寄与を通じて取り入れられる．これについては(8.6)–(8.8)を見よ．

(8.8)で定義されているエネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ は，エネルギー質量密度 $\tilde{\varrho} = T^{00}/c^2$ の相対論的一般化である．対応するリーマン・テンソル $T^{\mu\nu}$ は重力場の源として現れる．それは **重力場それ自身を除く** すべての関連したエネルギーを含む．実際的な応用では， $T^{\mu\nu}$ はほとんどの場合(20.29)になる．

## 演習

20.1: 重力場では次の軌道とスピンの運動方程式

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = -\,\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,u^\nu\,u^\lambda \quad と \quad \frac{ds^\mu}{d\tau} = -\,\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,u^\nu\,s^\lambda \tag{20.32}$$

が成り立つ．これのために $u^\mu\,u_\mu$ と $s^\mu\,s_\mu$ は保存量となることを示せ．

20.2: 粒子が一定の角速度 $\omega$ で円軌道

$$(x^\alpha) = (ct,\, R\cos(\omega t),\, R\sin(\omega t),\, 0)$$

上を運動しているものとする．粒子はスピン $s^\alpha$ をもっているが，トルクは働いていないものとする．それでスピンの運動方程式は $ds^\alpha/d\tau = -c^{-2}\,(du_\beta/d\tau)\,s^\beta\,u^\alpha$ と書ける．この方程式の解は

$$s^1 = \sigma\,\cos(\omega_{\rm Th} t), \qquad s^2 = -\sigma\sin(\omega_{\rm Th} t) \tag{20.33}$$

であることを示せ．ここで $\omega_{\rm Th} = \omega(\gamma - 1)$ である．手順として，まず式 $d^3s^0/dt^3 = -\omega^2\gamma^2(ds^0/dt)$ を導け．ここで $\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2$ である．振幅については $v^2/c^2$ の補正は無視せよ．

# 21 アインシュタインの場の方程式

アインシュタインの場の方程式は共変原理を使って導出することはできない．それは，一般共変方程式に導くべき場の方程式が局所慣性系に存在しないからである．しかし，アインシュタインの場の方程式は，それが共変であり，できるだけ簡単でかつニュートン極限をもつということから決定される．

## 場の方程式に対する条件

まず最初に，求めている場の方程式に対して要請されていることを書き並べてみる．

ニュートン極限(1.5)

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G\,\varrho(\boldsymbol{r}) \tag{21.1}$$

は，太陽系ではよく成り立つことが観測によって確認されている．したがって，設定された理論から極限としてそれが出てこなければならない．運動方程式の非相対論的極限から，われわれは

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \tag{21.2}$$

をすでに得ている．非相対論的極限では，エネルギー運動テンソルは(8.10)から

$$T^{00} \approx \varrho c^2 \qquad \frac{T^{0i}}{\varrho c^2} \approx \frac{v^i}{c} \ll 1, \qquad \frac{T^{ij}}{\varrho c^2} = \mathcal{O}\left((v/c)^2\right) \ll 1 \tag{21.3}$$

のように与えられる．したがって，ニュートン極限(21.1)は

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \tag{21.4}$$

の形に書かれる．$|g_{00} - 1| \ll 1$ であるから，$T_{00} \approx T^{00}$ であり，これを使った．

(21.4)の相対論的一般化は

$$\Box g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \qquad \text{(暫定的)} \tag{21.5}$$

であるとしてよいであろう．**弱い**重力場に対するアインシュタイン方程式の極限として類似の方程式が後ほど得られる．しかしながら(21.5)は妥当な式ではなく，このことは電気力学の類似の方程式とは対照的である．これは**あらゆる**エネルギーの形態が質量に寄与し，したがって重力場の源を成すということにかかわっている．重力場がエネルギーをもっているのは明らかであり，だからこそたとえば潮汐力発電が成り立つのである．しかし，重力場のエネルギーの寄与が(21.5)の右辺には含まれていない．この欠けている寄与を付け加えるには次のようにすればよい．

$$\Box g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\alpha\beta} + t^{\rm grav}_{\alpha\beta}\right) \qquad \text{(暫定的)} \tag{21.6}$$

この形から共変形に移行させることになる．しかしながら，この時点ではこのまま先には進まないことにする．というのは，まずわれわれは $t^{\rm grav}_{\alpha\beta}$ を知らない．大体，エネルギー運動量テンソルは（設定されるべき）場の理論から導出されるものである．他方，(15.22)から $g_{\mu\nu\|\lambda} = 0$ であるので，$\Box\, g_{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta}\, g_{\alpha\beta|\gamma|\delta}$ の共変的一般化は，行ったとしても意味のある結果はもたらされないであろう．われわれはこの二つの困難を次のようにして回避する．まず(21.6)の左辺に $t^{\rm grav}_{\alpha\beta}$ をもち込む．そして，今のところ未知のリーマン・テンソル $G_{\mu\nu}$ でその共変的一般化を記述する．すなわち

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{21.7}$$

電気力学の類推で[4)]，$t^{\rm grav}_{\alpha\beta}$ は偏微分導関数 $(\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda)$ の 2 次形式であろうと考える．テンソル $G_{\mu\nu}$ はそのような項を含んでいるべきであろう．さらに(21.6)の左辺の共変的一般化として， $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分導関数に関して線形であるべきだろう．この議論に基づいて，われわれは $G_{\mu\nu}$ に関して次のような要請をする．それらは，いくつかは必要不可欠なことであり，いくつかは納得のいくものである．

1. $G_{\mu\nu}$ はリーマン・テンソルである．

---

[4)] 訳注：電磁場のエネルギー密度は(6.16)で表され，それは $\partial A_i/\partial x^j$ の 2 次形式で表される．

2. $G_{\mu\nu}$ は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の1階と2階の微分導関数から構成される．その際，$G_{\mu\nu}$ は2階微分導関数については線形であり，1階微分導関数に関しては2次形式になるであろう．

3. エネルギー運動量テンソルに関しては，対称性 $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ と保存則 ${T_{\mu\nu}}^{\|\nu} = 0$ が成り立つ．(21.7)のために，これらの特性は $G_{\mu\nu}$ に引き写される．

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} \tag{21.8}$$

$${G_{\mu\nu}}^{\|\nu} = 0 \tag{21.9}$$

4. 弱い定常な場に対しては極限(21.4)が生じるべきである．かくして

$$G_{00} \approx \Delta g_{00} \tag{21.10}$$

## 場の方程式の導出

場の方程式は今設定した要請をもとに導出される．曲率テンソル

$$R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \frac{\partial\, \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}}{\partial\, x^{\nu}} - \frac{\partial\, \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial\, x^{\lambda}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\, \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\, \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} \tag{21.11}$$

は，その階数は別として $G_{\mu\nu}$ に対する要請1と2を満たしている．このことはまたリッチ・テンソル

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = g^{\kappa\rho}\, R_{\kappa\mu\rho\nu} \tag{21.12}$$

とスカラー曲率

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} \tag{21.13}$$

に対しても成り立つ．$R_{\sigma\mu\rho\nu} = R_{\sigma\nu\rho\mu}$ から $R_{\mu\nu}$ は添字に関して対称である．このことは $g_{\mu\nu}$ に対してもそうであった．よって数式

$$G_{\mu\nu} = a\, R_{\mu\nu} + b\, R\, g_{\mu\nu} \tag{21.14}$$

は条件1と2と(21.8)を満たす．そして，常数 $a$ と $b$ は(21.9)と(21.10)によって定まる．

(21.9)を利用するために，われわれはビアンキ恒等式(19.18)

$$R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu||\lambda}+R^{\rho}{}_{\mu\nu\lambda||\sigma}+R^{\rho}{}_{\mu\lambda\sigma||\nu}=R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu||\lambda}-R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu||\sigma}-R^{\rho}{}_{\mu\sigma\lambda||\nu}=0 \quad (21.15)$$

から始める．この際，添字の入れ替えのために(18.13)を使った．式(21.15)で，$\rho$ と $\sigma$ とを等しいとおいて縮約をとると

$$R_{\mu\nu||\lambda}-R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu||\rho}-R_{\mu\lambda||\nu}=0 \quad (21.16)$$

が出る．$\mu$ と $\nu$ との更なる縮約は

$$R_{||\lambda}-2\,R^{\rho}{}_{\lambda||\rho}=0 \qquad \text{または} \qquad R_{\mu\nu}{}^{||\nu}=\frac{R_{||\mu}}{2} \quad (21.17)$$

を与える[5)]．このことと $g_{\mu\nu}{}^{||\nu}=0$ とで，われわれは(21.14)に対する条件(21.9)を

$$G_{\mu\nu}{}^{||\nu}=a\,R_{\mu\nu}{}^{||\nu}+b\,g_{\mu\nu}{}^{||\nu}\,R+b\,g_{\mu\nu}R^{||\nu}=\left(\frac{a}{2}+b\right)R_{||\mu}=0 \quad (21.18)$$

のように書く．よって，$a=-2b$ か $R_{||\mu}=0$ が成り立たなければならない．もし $R_{||\mu}=0$ とすると，(21.7)から $T_{||\mu}=0$ となる[6)]．このことは，与えられた質量分布に対しては通常正しくない．ゆえに $a=-2b$ となり

$$G_{\mu\nu}=a\left(R_{\mu\nu}-\frac{R}{2}\,g_{\mu\nu}\right) \quad (21.19)$$

である．定数 $a$ はニュートンの極限から決めることができる．そのためわれわれは弱い場

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu} \qquad \text{ここで}\ |h_{\mu\nu}|\ll 1 \quad (21.20)$$

と非相対論的速度

$$|T_{ik}|\ll T_{00} \qquad \xrightarrow{(21.7)} \qquad |G_{ik}|\ll|G_{00}| \quad (21.21)$$

---

5) 訳注：$R_{\lambda\nu}{}^{||\nu}=R_{\nu\lambda}{}^{||\nu}=g^{\nu\xi}\left(g_{\nu\rho}\,R^{\rho}{}_{\lambda}\right)_{||\xi}=g^{\nu\xi}\left(g_{\nu\rho||\xi}\,R^{\rho}{}_{\lambda}+g_{\nu\rho}\,R^{\rho}{}_{\lambda||\xi}\right)=\delta^{\rho}_{\xi}\,R^{\rho}{}_{\lambda||\xi}=R^{\rho}{}_{\lambda||\rho}$

6) 訳注：$G_{||\mu}=a\,R^{\nu}{}_{\nu||\mu}+b\,R_{||\mu}\,\delta^{\nu}{}_{\nu}=(a+4b)\,R_{||\mu}=(8\,\pi\,G/c^4)\,T_{||\mu}$

を考える．われわれはまず最初に $G_{\mu\nu}$ の縮約をとる．すると

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu}=\begin{cases}\overset{(21.19)}{=}\ a(R-2R)=-aR\\[2ex] \overset{(21.21)}{\approx}\ g^{00}G_{00}\ \overset{(21.20)}{\approx}\ a(R_{00}-R/2)\end{cases} \tag{21.22}$$

となる．両方の解を比較すると $R=-2R_{00}$ を得る．よって

$$G_{00}=a(R_{00}-g_{00}R/2)\approx 2aR_{00} \tag{21.23}$$

弱い場に対しては曲率テンソル(21.11)における $h_{\mu\nu}$ の2乗の項は無視できて

$$R_{\mu\nu}=R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}=\frac{\partial\,\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial\,x^{\nu}}-\frac{\partial\,\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial\,x^{\rho}}\qquad(|h_{\mu\nu}|\ll 1) \tag{21.24}$$

となる．定常な弱い場に対してはこれから

$$R_{00}=-\frac{\partial\,\Gamma^{i}_{00}}{\partial\,x^{i}}\quad\text{ここで}\quad \Gamma^{i}_{00}\overset{(11.25)}{=}\frac{1}{2}\frac{\partial\,g_{00}}{\partial\,x^{i}} \tag{21.25}$$

を得る．これから

$$G_{00}=-2a\frac{\partial\,\Gamma^{i}_{00}}{\partial\,x^{i}}=-a\,\Delta g_{00} \tag{21.26}$$

となる．これを(21.10)と比べると $a=-1$ を得る．

上に要請された諸事項は

$$\boxed{R_{\mu\nu}-\frac{R}{2}\,g_{\mu\nu}=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\qquad\text{アインシュタインの場の方程式}} \tag{21.27}$$

で満たされる．この方程式は1915年にアインシュタインによって設定された．運動方程式(19.17)とともに，これは求めている一般相対論の基礎方程式である．(21.27)の縮約から

$$R^{\mu}{}_{\mu}-\frac{R}{2}\,\delta^{\mu}_{\mu}=-R=-\frac{8\pi G}{c^4}\,T^{\mu}{}_{\mu}=-\frac{8\pi G}{c^4}\,T \tag{21.28}$$

が出る．これを使って(21.27)の $R$ を $T$ で置き換えると，もう一つの形

$$\boxed{R_{\mu\nu}=-\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu}-\frac{T}{2}\,g_{\mu\nu}\right)\qquad\text{アインシュタインの場の方程式}} \tag{21.29}$$

が得られる．

## 場の方程式の修正

われわれは，(21.7)に関連して出された要請 1-4 によって，アインシュタインの場の方程式は一義的に定められる([文献 1] の 6.2 節)と証明もなしに述べた．これを証明するために，$\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}=0$ であるような局所慣性系の 1 点に移る．そうすると，$G_{\mu\nu}$ は偏微分導関数 $\partial\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}/\partial x^{\cdot}$ からだけでつくられることになる．要請 2 はこれらの偏微分導関数のある決められた組合せだけを認めており，それはまさに(21.11)の右辺の最初の 2 項である．よって曲率テンソルは，計量テンソルの 2 階導関数に関して線形であるような表示を作り出せる唯一のテンソルである．

別の重力理論を得るためには，設定されている要請からはずれなければならない．一つの可能性は，$G_{\mu\nu}$ に $g_{\mu\nu}$ に線形な項を認めることである（要請 2 からはずれる）．更なる修正は，$g_{\mu\nu}$ のほかに余分な場を導入することである．以下で両方の可能性を議論することにする．

### 宇宙定数

要請 2 の自然な一般化は，$g_{\mu\nu}$ に関して線形な項を追加することである．場の方程式はこのとき

$$R_{\mu\nu}-\frac{R}{2}\,g_{\mu\nu}+\Lambda\,g_{\mu\nu}=-\frac{8\pi G}{c^4}\,T^{\mu\nu} \tag{21.30}$$

となる．ここで $\Lambda$ はリーマン・スカラーである．前に設定された要請 1 から 3 は，（要請 2 は一般化して）(21.30)で満たされる．しかしながら，（ニュートンの極限を与えるという）要請 4 はもはや満たされない．ところで，$R_{\mu\nu}$ は座標に関する 2 階導関数を含んでいるから，$\Lambda$ は $1/(\text{長さ})^2$ の次元をもっている．ニュートンの理論は，太陽系ではじつにみごとに成り立っているのであるから，追加の項は非常に小さくなければならない．このことは，長さ $\Lambda^{-1/2}$ は天の川銀河の直径に比べて十分大きいということを意味している．すなわち

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\ >10^5\ \text{光年} \tag{21.31}$$

この制限があるので，宇宙の大域的な運動を取り扱う際にまずはともあれ，この**宇宙定数** $\Lambda$ が取り上げられる．現在の宇宙モデルでは，$\Lambda^{-1/2} \sim 10^{10}$ 光年のオーダーの有限の宇宙定数が好んで用いられる（53 節）．

$\mu = \nu = 0$ に対しては，(8.10) を使うと (21.30) の右辺は $-(8\pi G/c^2)\,\varrho$ となる．そして宇宙項 $\Lambda\, g_{00} \approx \Lambda$ は右辺に移項して，質量密度への寄与と考えることができる．このことは置き換え $\varrho \to \varrho + \varrho_\Lambda$ を意味する．ここで

$$\varrho_\Lambda c^2 = \frac{c^4}{8\pi G}\,\Lambda \tag{21.32}$$

である．定数 $\Lambda$ は，このように真空（何もない空間）のエネルギー密度 $\varrho_\Lambda c^2$ に対応する．真空エネルギー密度の重力への影響は，後ほど 52 節と 53 節で議論される．

## 他の重力場の理論

他の重力場の理論を展開するためには，通常，ラグランジアン密度を設定することから始める．一般相対論の源なしの場の方程式は，変分原理 $\delta \int d^4x \sqrt{|g|}\, R = 0$ から出る．ここで，$\sqrt{|g|}\, d^4x$ は共変な体積要素，$R$ はスカラー曲率である．この変分原理のラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\rm grav} \propto R$ は，明らかにこの場合に考え得るもっとも簡単なリーマン・スカラーである．一方，特殊相対論の表式から出発して任意の座標系を導入すれば（実際は $\eta_{\alpha\beta}$ を $g_{\mu\nu}$ で置き換える），物質のラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\rm mat}$ が手に入る．そして変分原理 $\delta \int d^4x \sqrt{|g|}\,(\mathscr{L}_{\rm grav} + \mathscr{L}_{\rm mat}) = 0$ で，これまで議論した一般相対論の場の方程式を得る．これに関連した詳細な議論は，たとえば [文献 2] の 2.4 節に与えられている．

ラグランジアン密度 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\rm grav} + \mathscr{L}_{\rm mat}$ に新たに場を追加すると一般相対論からずれた理論になる．そのような例が次の小節に与えられる．その際，考えている追加の場は $\mathscr{L}_{\rm grav}$ にだけ入るとするほうが自然である．というのは，$\mathscr{L}_{\rm mat}$ へ追加の場を入れると，高い精度 ($10^{-12}$) で確かめられている等価原理を一般に損なうからである．一般相対論の運動方程式はまさに等価原理から出るのであり，運動方程式によって場と物質との（重力的な）結合が出る．変分原理においては，$\mathscr{L}_{\rm mat}$ に含まれる $g_{\mu\nu}$ からこの結合が生じる．

$\mathscr{L}_{\rm grav}$ によって，中身（$g_{\mu\nu}$ と他の場）および（非線形な）自己相互作用と重力場の力学が決められる．アインシュタインの想定 $\mathscr{L}_{\rm grav} \propto R$ の結果の証明はおおよそ $10^{-3}$ の精度であり（31 節），変更の余地は場と物質の結合の場合より大きい．

アインシュタインの理論は実験的に（等価原理に対して $10^{-12}$ の精度で，場の力学に対して $10^{-3}$ の精度で）確認されているのに，なぜ他の理論を考えなければならないのか疑問に思うであろう．本質的な理由は次のとおりである．理論物理学の現在の枠組みを拡張しようとするほとんどすべての試み（カルツァ(Kaluza)－クライン(Klein)理論，ひも理論，超対称性理論）で新しい場が導入され，それが重力に深く関連するのである．これらの新しい場は，一方では場それ自身の力学（すなわち $\mathscr{L}_{\rm grav}$）を変える．しかしほとんどの場合，それらは場と物質の相互作用をもまた変えるが，それは等価原理を損なうことになる[7]．そうではありながら，予測される等価原理の破れが $10^{-12}$ より小さくなるような理論もいくつか存在する．

## ブランス－ディッケ理論

ブランス(Brans)とディッケ(Dicke)は，$g_{\mu\nu}$ の他にスカラー場 $\Psi$ を導入した[8]．それに対する動機として，われわれはある物体の質量 $M_k$ とその広がり $R_k$ の間の関係

$$G\,M_k \sim c^2\,R_k \tag{21.33}$$

を考える．物体の重力場が相対論的であるときは，この関係はただちに $\Phi \sim GM_k/R_k \sim c^2$ となる．(21.33)によって，重力相互作用の強さ $G$ は現在の宇宙の質量（$R_k^3$ の領域の $M_k$）によって引き起こされていると推定できる．この考えはマッハ原理の拡張として理解される．実際に重力場の強さが宇宙の質量に起因するとすれば，もはや $G$ は常数ではありえない．前記のスカラー－テンソル理論では，$G$ はスカラー，かつ，遠距離まで届く場 $\Psi$ で置き

[7] T.Damour, *Testing the equivalence principle: why and how?*, Class.Quantum Grav. 13 (1966) A33 or E-Print gr-qc/960680 in Archiv http://xxx.lanl.gov/.

[8] 訳注：アインシュタインの方程式(21.27)も(21.30)もテンソル場 $g_{\mu\nu}$ とそれから作り出された $R_{\mu\nu}$ と，本質的に $g_{\mu\nu}$ とは無関係な $T_{\mu\nu}$ とからできている．そのような式に新しくスカラー場 $\Psi$ を導入する．

換えられ，それは宇宙の現在の質量から決められる．$\Psi$ に対するもっとも簡単で共変な場の方程式は $\Psi^{|\nu}{}_{\|\nu} \propto T = T^{\nu}{}_{\nu}$ である．宇宙の質量に対しては，これは $\Psi/R_k^2 \propto M_k/(R_k^3\, c^2)$ となる．(21.33) と比較すれば，$\Psi \propto 1/G$ であることがわかる．われわれは，**平均場**が重力常数の逆数に等しいように場の方程式の定数を選ぶ．すなわち

$$G = \frac{1}{\langle\Psi\rangle} \tag{21.34}$$

太陽系では，宇宙の質量が引き起こす場 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ は実効的には定数であり，$1/G$ はその平均値で置き換えられる．

ブランス－ディッケのスカラー－テンソル理論から $g_{\mu\nu}$ と $\Psi$ を結合した場の方程式が導かれる．この理論は次式

$$\omega = \frac{\text{テンソル場}\, g_{\mu\nu}\text{の影響}}{\text{スカラー場}\Psi\text{の影響}} = \begin{cases} \infty & \text{一般相対論} \\ \mathcal{O}(1) & \Psi\text{-場が本質的} \end{cases} \tag{21.35}$$

のような意味をもつ無次元のパラメター $\omega$ をもっている．ブランス－ディッケ理論では，パラメター $\omega$ は数値的に定まらない．そして，それは一般相対論を極限 $\omega \to \infty$ として含んでいる．$\omega = \mathcal{O}(1)$ であれば，アインシュタインの場の方程式を変更しようと試みることは物理的に重要であると言っていい．しかし，可能なパラメター領域が近年の実験で $\omega \gtrsim 500$ に制限されたので，今日ではブランス－ディッケ理論はもはや特に魅力的ではない．

## 演習

21.1: 場の方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\,\pi\, G}{c^{\,4}}\, T_{\mu\nu}$$

は次のような別の形に書けることを示せ．

$$R_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\,\pi\, G}{c^{\,4}} \left( T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\, g_{\mu\nu} \right) \tag{21.36}$$

# 22 場の方程式の構造

アインシュタインの場の方程式の形式的な性質を議論する．まず弱い場に対する重力場のエネルギー運動量テンソルが定められる．この極限では，場の方程式は線形化され，その一般解が与えられる．

## 独立な方程式の数

テンソル $G_{\mu\nu}$ と $T_{\mu\nu}$ は対称で，それゆえ 10 個の独立な成分をもつ．よって場の方程式(21.27)は，$g_{\mu\nu}$ に対して代数的な 10 個の独立な方程式になる．それで求める場 $g_{\mu\nu}(x)$ の 10 個の独立な成分を定めるためには，これらの方程式で十分であると思うかもしれない．しかしながらそうではない．というのは，求められた 10 個の関数 $G_{\mu\nu}$ は 4 個の条件

$$G^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0 \tag{22.1}$$

を満たしており，すでに前節で任意の $g_{\mu\nu}$ に対して(22.1)が成り立つように $G_{\mu\nu}$ は定められている．こうして(22.1)のために，アインシュタイン方程式のうち $10 - 4 = 6$ だけが関数的に独立である．よって場の方程式では，10 個の関数 $g_{\mu\nu}$ は完全には決められない．解 $g_{\mu\nu}(x)$ が不確定であるということは，場の方程式が共変であることの当然の帰結である．なぜならば，ある解 $g_{\mu\nu}(x)$ から一般座標変換 $x^\mu \;\to\; x'^{\,\mu}$ によって再び解 $g'_{\mu\nu}(x')$ が得られるからである．座標変換は四つの関数 $x^\mu = x^\mu(x')$ の選び方に相当する．だから場の方程式は $10 - 4 = 6$ 個の関数だけを決めることができるし，また決まるのは当然である．自明な例を挙げよう．源なしの場の方程式 $R^{\mu\nu} = 0$ は，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ によっても，$(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\,(1,\ -1,\ -(x^1)^2,\ -(x^1\sin x^2)^2)$ によっても解かれる（ミンコフスキー空間における対応するデカルトまたは球座標）．この自由度は，適切な座標を選ぶことによって問題の解を簡単化するのに役立つ．

電気力学でも，ポテンシャルは場の方程式を使っては一義的には決められない．マクスウェル方程式

$$F^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^{\beta} \tag{22.2}$$

は四つの未知の場 $A^{\alpha}$ に対する四つの代数的に独立な方程式($\beta = 0, 1, 2, 3$) である．任意の $A^{\alpha}$ に対して場は，条件

$$F^{\alpha\beta}{}_{|\alpha|\beta} = 0 \tag{22.3}$$

を満たす．よって(22.2)には4−1=3の，関数的に独立な方程式が含まれていることになる．条件(22.3)と(22.1)は，場の源の項に対するそれぞれの保存則に対応している．

電気力学と同じように，一般相対論でも場の方程式の形式を変えないようなポテンシャル $g_{\mu\nu}$ の変換が存在する（電気力学では場 $F^{\alpha\beta}$ 自身がゲージ不変量である）．これはある場合には一般座標変換であり，また別の場合にはゲージ変換である．この自由度は，適切なゲージ条件を通して場の方程式の結合を解くのに大いに利用される．電気力学ではゲージ条件 $A^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0$ が要請される．それによって(22.2)は

$$\Box A^{\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^{\alpha} \tag{22.4}$$

となり，拘束が解かれた場の方程式となる．この類似でわれわれは，線形化された場の方程式の**拘束を解く**ために $g_{\mu\nu}$ の自由度を利用することにする．

## 場の方程式が解ける可能性

場の方程式は**非線形**なので，源をもつ場の方程式の標準的な解き方は存在**しない**(これは電気力学の遅延ポテンシャルの場合とは対照的である)．しかしながら

1. 単純な設定のもとでは厳密な解がある（たとえば等方で時間依存性なし)．
2. 弱い場のときには線形化された場の方程式に対する解が存在する．
3. ポスト・ニュートン近似が，弱い場とゆっくり運動している粒子に対する場の方程式と運動方程式に使える．

24 節で厳密かつ意味のある解がまず一つ紹介され，さらに類似の解がいくつか示される．線形化された場の方程式とその解はこの節の最後の部分に与えられる．そして重力波に関するⅦ章では，線形化された場の方程式がまさしく適用される．

惑星または 2 体系で生じる運動に対しては，$v^2/c^2 \sim |\Phi|/c^2 \ll 1$ が成り立つ．ポスト・ニュートン近似とは，この小さな量に関する運動方程式と場の方程式の系統的な展開である．その際，ある決まった次数まですべての項が矛盾することなく考慮される．最低次はニュートン極限を与え，次の次数は最初のポスト・ニュートン近似になる．われわれはこの近似様式を細部まで検討することはしない．ただ，太陽系で相対論効果を計算する際にニュートン極限に重要な補正を与えるが，それは最初のポスト・ニュートン近似に対応している．

## 重力場のエネルギー運動量テンソル

ミンコフスキー・テンソルからのずれが微小な場合，すなわち

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{22.5}$$

の場合は，$h_{\mu\nu}$ のべき乗で $G_{\mu\nu}$ を展開できる．1 次の項は線形の波動方程式を与える．3 次の項を無視すると 2 次の項は重力場のエネルギー運動量テンソルを与える．

われわれは $h_{\mu\nu}$ に関するいろいろな次数の項を

$$R_{\mu\nu} = R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots \tag{22.6}$$

によって表す．当然 $R^{(0)}_{\mu\nu} = 0$ である[9]．われわれは(18.11)から

$$R_{\rho\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\rho\sigma|\mu|\nu} + g_{\mu\nu|\rho|\sigma} - g_{\mu\sigma|\nu|\rho} - g_{\rho\nu|\sigma|\mu}\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right) \tag{22.7}$$

と

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = R^{\rho\,(1)}_{\ \mu\rho\nu} = \frac{1}{2}\left(\Box h_{\mu\nu} + h^{\rho}{}_{\rho|\mu|\nu} - h^{\rho}{}_{\mu|\rho|\nu} - h^{\rho}{}_{\nu|\rho|\mu}\right) \tag{22.8}$$

[9] 訳注：この場合，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ に対応しているから $R^{(0)}_{\mu\nu} = 0$.

とを得る．(22.5)のために考えている座標は準ミンコフスキー座標であり

$$\partial^\mu \partial_\mu = \Box + O(h) \tag{22.9}$$

として，ダランベール演算子 $\Box = \partial^\alpha \partial_\alpha$ を導入してよい．$h$ の 1 次のスカラー曲率は

$$R^{(1)} = \eta^{\lambda\rho} R^{(1)}_{\lambda\rho} \tag{22.10}$$

で与えられる．さて，場の方程式左辺の $h$ の 2 次の項に取りかかろう．われわれはこの項を一つの量 $t_{\mu\nu}$ にまとめる．

$$R^{(2)}_{\mu\nu} - \left(\frac{R\,g_{\mu\nu}}{2}\right)^{(2)} \equiv \frac{8\pi G}{c^4}\, t_{\mu\nu} \tag{22.11}$$

そして場の方程式の右辺にもっていく．$h$ の 3 次以上の項を無視すると，アインシュタインの場の方程式は

$$R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{R^{(1)}}{2}\,\eta_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\,(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \tag{22.12}$$

となる．これは源の項

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu} \tag{22.13}$$

をもつ波動方程式で，$h_{\mu\nu}$ に関して線形な式である．$t_{\mu\nu}$ の意味は次のように考えるとわかる．$G_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} R/2$ に対して $G^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0$ が成り立つ．この式は任意の場に対して成り立つ．すなわち，$G^{\mu\nu}{}^{(1)}_{\|\nu} = 0$ である．これは今の場合

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{R^{(1)}}{2}\,\eta_{\mu\nu}\right) = 0 \tag{22.14}$$

と同じことである．このようにして(22.12)から

$$\frac{\partial\,\tau_{\mu\nu}}{\partial\,x_\nu} = T_{\mu\nu}{}^{|\nu} + t^{|\nu}_{\mu\nu} = 0 \tag{22.15}$$

が出る．保存則 $T_{\mu\nu}{}^{\|\nu} = 0$ は $T_{\mu\nu}$ への重力場の影響を含んでいる．すなわち，この保存則は(20.29)に対する重力場中の流体力学の基本方程式である．これに対して(22.15)では，非相対論的な部分（$T_{\mu\nu}$）と重力的な部分（$t_{\mu\nu}$）とが和として現れている．

よく知られたやり方（8節）で，$\tau_{\mu\nu}{}^{|\nu}=0$ から，閉じた系では4元運動量

$$P_\mu = \int d^3 r\ \tau_{\mu 0} = \text{const} \tag{22.16}$$

は時間的に一定であることが出てくる．これから $\tau_{\mu 0}$ が運動量密度であり，$\tau_{\mu\nu}$ がエネルギー運動量テンソルであるとの解釈がつく．$T_{\mu\nu}$ は重力の成分をまったく含んでいないので，(22.11) の $t_{\mu\nu}$ は重力場のエネルギー運動量テンソルである．われわれはこれに添え字 'grav' をつけて次のように書く．

$$t^{\text{grav}}_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G}\left[R^{(2)}_{\mu\nu} - \left(\frac{R\,g_{\mu\nu}}{2}\right)^{(2)}\right] \qquad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \tag{22.17}$$

この表式は34節でさらに検討する．

## 線形化された場の方程式

$h$ について最低次のアインシュタインの場の方程式を立てる．結果の**線形化された場の方程式**の解は，遅延ポテンシャルの形で記述されることを示す．

(22.8) を使うと，$h$ の1次の場の方程式は

$$\Box h_{\mu\nu} + h^{\rho}{}_{\rho|\mu|\nu} - h^{\rho}{}_{\mu|\rho|\nu} - h^{\rho}{}_{\nu|\rho|\mu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\eta_{\mu\nu}\right) \tag{22.18}$$

となる．左辺によって右辺もまた $h$ の1次である．よって $g_{\mu\nu}$ は，ここでは $\eta_{\mu\nu}$ で置き換えられている．

場の方程式は共変であるから座標変換は自由である．しかし $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ としているので，変換したとしてもミンコフスキー座標からのずれはわずかであろう．さて，微少量 $\epsilon^\mu$ を使って座標変換

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \tag{22.19}$$

をする．次の関係

$$g'^{\mu\nu} = \alpha^\mu_\lambda\, \alpha^\nu_\kappa\, g^{\lambda\kappa} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa}\, g^{\lambda\kappa} \tag{22.20}$$

から $h^{\mu\nu}$ の変換を導き出す．まず

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \tag{22.21}$$

において $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ と比べると，マイナス記号が出ていることに気をつけよう．これは条件 $g^{\nu\kappa} g_{\kappa\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}$ によって $g^{\nu\kappa}$ が $g_{\kappa\mu}$ の逆数として定義されていることから来ている．(22.21)が $h$ の 1 次でこの条件を満たしていることは簡単にチェックできる．(22.21)と

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \delta^{\mu}_{\lambda} + \frac{\partial \epsilon^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \tag{22.22}$$

とを(22.20)に代入すると

$$\eta^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} = \left(\delta^{\mu}_{\lambda} + \frac{\partial \epsilon^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right) \left(\delta^{\nu}_{\kappa} + \frac{\partial \epsilon^{\nu}}{\partial x^{\kappa}}\right) (\eta^{\lambda\kappa} - h^{\lambda\kappa}) \tag{22.23}$$

となる．これは

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \epsilon^{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \epsilon^{\nu}}{\partial x_{\mu}} \tag{22.24}$$

を与える．これはすでに $h$ の 1 次であるから，$g_{..} \approx \eta_{..}$ と $g^{..} \approx \eta^{..}$ の添え字を上または下に動かすことができる．よって

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \epsilon_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \epsilon_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \qquad (\text{ゲージ変換}) \tag{22.25}$$

が成り立つ．電気力学との類似で，ポテンシャル $g_{\mu\nu}$ のこの変換は**ゲージ変換**と呼ばれる．座標変換(22.19)は場の方程式(22.18)の形を変えない[10]．四つの関数 $\epsilon^{\mu}(x)$ を任意に選べるということは，ポテンシャル $h_{\mu\nu}$ に次の四つの条件をつけてもよいということである[11]．

$$2\, h^{\mu}{}_{\nu|\mu} = h^{\mu}{}_{\mu|\nu} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{22.26}$$

このようにして定められた座標の意味は，物理的な距離 $ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu}$ を考えれば明らかである．電気力学と同じように，物理的な結果はゲージに（したがって使われた座標に）依存しない．

[10] 訳注：実際に(22.19)を(22.18)に代入すれば明らか．

[11] 訳注：(22.18)の左辺は $\Box h_{\mu\nu} + (1/2)\partial_{\mu} V_{\nu} + (1/2)\partial_{\nu} V_{\mu}$ と書くことができる．ここで $V_{\xi} \equiv h^{\rho}{}_{\rho|\xi} - 2\, h^{\rho}{}_{\xi|\rho}$．$V_{\xi}$ を恒等的にゼロに置けたら，すなわち(22.26)がつねに成り立ったら，(22.18)の左辺は第 1 項のみとなる．

ゲージ条件(22.26)を(22.18)に挿入する．すると次の**拘束が解けた線形の場の方程式**

$$\boxed{\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\eta_{\mu\nu}\right) \qquad \text{線形化された場の方程式}} \tag{22.27}$$

が得られる．この方程式は電気力学の場の方程式(22.4)と同じ構造をもっている．よって，この解はよく知られた遅延ポテンシャルの形をもつ．

$$h_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{4G}{c^4}\int d^3r'\,\frac{S_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{22.28}$$

ここで

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\eta_{\mu\nu} \tag{22.29}$$

である．$S_{\mu\nu}$ のなかの遅延時間の意味はよく知られている．すなわち，$\boldsymbol{r}'$ の源項は場所 $\boldsymbol{r}$ の場に $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$ だけ時間的に遅れて影響を与える．ある場所の源項が変動すると，それによって引き起こされる場の擾乱は光速で広がる．

また線形化された場の方程式の先進ポテンシャル解は形式的には存在するが，それを取り入れることは因果律の要請に反することになる．

## 場の方程式の量子化

一般相対性理論は，電気力学と同じように古典的な場の理論である．多くの現象に対してはこのような古典論で十分である．しかしながら電磁気の分野では，記述するのに場の量子化が絶対に必要であるような現象（たとえば光電効果，プランクの放射分布，コンプトン(Compton) 効果）がたくさんある．量子化されたその理論は量子電気力学であり，われわれの知っているかぎりではそれによってすべての現象が正確に記述できる．ところで，一般相対論に関してはどうであろうか？

これまでのところ，矛盾のない完全な重力の量子力学は存在しない[12)]．一般相対論の場の方程式を量子化するに際していくつかの困難が生じるが，それらは $g_{\mu\nu}$ の物理的ではない自由度と場の方程式の非線形性とに関連している．

[12)] M.Perry, *Quantum Gravity*, 文献 9 の 377-406 頁．

量子化の問題は，線形化された場の方程式を考えるときには簡単である．このときは電気力学との類似が特に著しい．量子化の基本は，ある波がエネルギー $\hbar\omega$ をもつ有限のまとまりから成り立っていると想定することである．上に掲げた電磁気の諸現象は，この方法で取り扱うことができる．32 節において，このような量子化の枠内で，エネルギー運動量，重力子のスピン，そして重力場の量子を取り扱うことにする．しかしながら，ある原子が重力子を放射する確率を見積ってみれば（36 節），この量子化が何ら実際的な意味をもたないということがはっきりするであろう．

再び一般相対論の非線形な場の方程式を考察し，いったいどんな条件のもとで量子効果が重要になるのかを評価しよう．質量 $M$ の粒子はコンプトン波長 $\lambda_{\rm C} = \hbar / M c$ をもっている．したがって，重力ポテンシャルの絶対強度が範囲 $\lambda_{\rm C}$ で大きさ 1 になるとき，すなわち $G M/(c^2 \lambda_{\rm C}) \sim 1$ に対して重力の量子効果は重要になる．この条件を満たすような物質の質量はプランク質量と呼ばれる．

$$M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 1.2 \times 10^{19}\, \frac{\rm GeV}{c^2} \qquad \text{(プランク質量)} \tag{22.30}$$

$M_p$ は，自然定数 $c$ と $G$（相対論的重力理論），$\hbar$（量子論）とから組み立てられる唯一の質量であるという事実もこの評価に根拠を与えている．プランク質量のコンプトン波長はプランク長である．

$$L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.6 \times 10^{-35}\,{\rm m} \qquad \text{(プランク長)} \tag{22.31}$$

エネルギー $E \gtrsim M_p c^2$（あるいは $L \lesssim L_p$）に対して，重力の量子効果は重要な役割を演ずるに違いない．しかし，このエネルギーの大きさは技術的に可能な領域を途方もなく超えた領域にある．実際，現存する加速器では，最大でもおよそ $10^3$ GeV のエネルギーをもつ粒子しか作れない．しかしながらブラックホール（48 節）の中心部を推定する際や，ごく初期の宇宙（54 節）を考察する際には量子効果が考慮されなければならない．

まとめて言えば，量子化された重力場の理論で一般的に受け入れられているものはまだない．また量子化が重要になると思われる実現可能な実験もな

い．しかし，矛盾のない量子重力理論が構築できるかどうかという問題は，理論物理学の体系に対して原理的に重要である．

## 演習

22.1:　弱い場に対しては $T_{\mu\nu}{}^{\|\nu} \approx T_{\mu\nu}{}^{|\nu} \approx 0$ である．これによって遅延ポテンシャル

$$h_{\mu\nu}(\boldsymbol{r},\,t) = -\frac{4\,G}{c^{\,4}}\int d^3r' \;\frac{S_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}',\,t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{22.32}$$

がゲージ条件

$$2\,h^{\mu}{}_{\nu|\mu} = h^{\mu}{}_{\mu|\nu}$$

を満たすことを示せ．ここで $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - T\,\eta_{\mu\nu}/2$ である．

22.2:　均一な回転している球（密度 $\rho$，半径 $R$，回転数 $\omega$，圧力 $P \approx 0$）の外部空間における静的な場 $h_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})$ を定めよ．(22.28) から始めること．$v/c$ と $\omega R/c$ の 1 次のオーダーの項だけを取り出せ．

# VI　静的な重力場

## 23　等方で静的な計量

VI章では静的な重力場が取り扱われる．考察する場は一様に帯電した球のクーロン場，または回転している球の磁場に対応する．われわれはまず等方で静的な計量を導出する（23 節と 24 節）．そしてその後，一連の物理的な効果を議論し計算する．計算された結果は太陽系で点検することができる．

### 標準形

地球と太陽の重力場に関する一般相対論の応用はたくさんある．回転($v^i \ll c$)とわずかな扁平率を無視すると，地球あるいは太陽は**球対称で静的**に質量が分布した物体として記述できる．これらに対して，等方で静的な場の方程式の解 $g_{\mu\nu}(x)$ が存在すべきである．われわれはこのような計量の一般的な形をまず設定する．次の節で，この標準形をアインシュタインの場の方程式を解く手がかりとする．

$r \to \infty$ でニュートンの重力ポテンシャル $\Phi = -GM/r$ はゼロになる．よって，求める計量は漸近的にミンコフスキー計量になるべきであり

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \qquad (r \to \infty) \tag{23.1}$$

となる．ここで，$r$，$\theta$，$\phi$ は球座標，そして $t$ は座標時である．重力場では，計量係数は(23.1)からずれた形で次のように表される．

$$ds^2 = B(r)\, c^2dt^2 - A(r)\, dr^2 - C(r)\, r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{23.2}$$

等方性と時間に依存しないという仮定のために，係数は $\theta$，$\phi$ または $t$ を含まない．また，(23.1)に表れている微分以外の微分は考えなくてよい．というのは，等方性のために点 $(t,\, r,\, \theta,\, \phi)$ と $(t,\, r,\, \theta \pm d\theta,\, \phi)$ との距離は $\pm\, d\theta$ の符号に依存しないはずであり，したがって $d\theta$（または $d\phi$）に線形な項は現れないはずである．唯一可能な $D(r)dr\, dt$ の形の項は，新しい時間変数 $t \to t + \psi(r)$ を導入して消去することができる．

座標は自由に選択してよいので新しい半径変数を導入する．すなわち，$C(r) = 1$ と置くことにする[1)]と次の式を得る．

**標準形：**

$$d\, s^2 = B(r)\, c^2 dt^2 - A(r)\, dr^2 - r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2 \right) \tag{23.3}$$

これは等方で静的な計量に対する一般的な表現であり，**標準形**と呼ばれている．極限(23.1)のために

$$B(r) \overset{r \to \infty}{\longrightarrow} 1, \qquad A(r) \overset{r \to \infty}{\longrightarrow} 1 \tag{23.4}$$

である．さて標準形の座標の意味を考えよう．われわれは $r$ と $t$ に対してだけ別の座標を選ぶ自由度を利用した．角座標 $\theta$ と $\phi$ は(23.1)と同じ意味，すなわち通常の意味をもつ．実際的には，角度は恒星によって定められる．よって極限(23.1)は，恒星天に対して静止しているある慣性系に対応しているものと考えられる．(23.4)によって $t$ は，無限のかなたに静止している時計が示している時間である．そしてまた，(23.4)によって $r$ は漸近的に通常の距離の座標になる．

前提としている等方性のために，（球面上の点と同じように）面 $r = \text{const.}$ 上のすべての点は同等である．この面の面積は $4\pi r^2$ であるが，半径方向の距離は $\Delta r = \int_{r_2}^{r_1} dr' A^{1/2}$ である．$A \neq 1$ であるので，3 次元の（座標 $r$，$\theta$，$\phi$ をもっている）内部空間は平坦ではない．したがって，面 $r = \text{const.}$ はまた，ユークリッド空間における球平面の特性をもっていない．

---

1) 訳注：実際は $r^2\, C(r) = r'^2$，$r' \to r$ である．

## ロバートソン展開

場の方程式の解が得られなくても，物体の外側でしかも弱い場に対して計量(23.3)の展開形を与えることができる．その場は，考えている物体（たとえば，地球または太陽）の全質量 $M$，考えている場所 $r$，定数 $G$ そして $c$ に依存する．係数 $A(r)$ と $B(r)$ は無次元であるから，これらは先ほどの量を組み合わせた無次元の量 $GM/(c^2r)$ だけに依存している．よって $GM/(c^2r) \ll 1$ であるとき，われわれは次の **ロバートソン**(Robertson)**展開**を行うことができる．

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&B(r) = 1 - 2\,\frac{GM}{c^2\,r} + 2\,(\beta - \gamma)\left(\frac{GM}{c^2\,r}\right)^2 + \cdots \\
&A(r) = 1 + 2\,\gamma\,\frac{GM}{c^2\,r} + \cdots \qquad \text{ロバートソン展開}
\end{aligned}
}
\tag{23.5}
$$

場の方程式はニュートンの極限(11.28)を含んでいなければならないので，$B(r)$ に対する展開は $1 - 2\,GM/(c^2\,r)$ で始まる．$\alpha \neq 1$ であるような（わずかな）ずれ $B(r) = 1 - \alpha\,GM/(c^2\,r)$ はたしかに考えられうる．しかし，それは実験的にはほとんど決められないだろう．というのは，（地球や太陽の）天体の質量は実際上，それの漸近的な重力場に基づいて定められるのであるから，その天体の大きさや密度の見積もりには大きな誤差が含まれている可能性がある．ところで，$B(r)$ の項で（$2\beta$ としないで）$2(\beta - \gamma)$ のついた項の計算には歴史的な理由がある[2)]．

ロバートソン展開には次のような意味がある．すなわち，重力場(23.5)中の運動方程式を解くことによって，無次元パラメター $\beta$，$\gamma$，$\cdots$ に依存する物理的な効果が予測されるのである．太陽の重力場に対しては $GM/(c^2r) \leq GM/(c^2\,R_\odot) \approx 2 \cdot 10^{-6}$ が成り立つので，$\beta$ と $\gamma$ までを含む項だけが重要である．観測結果の評価がこれらのパラメターの値を決め，それらの値は理論的な予測と比較することができる．さて，一般相対性理論とニュートンの重力理論に対して次のことが成り立つ．

---

[2)] この展開は最初は等方的な形の計量(23.19)に対してなされた．それに対しては $H$ と $J$ は $H = 1 - 2\alpha\,x + 2\beta\,x^2 + \cdots$ と $J = 1 + 2\gamma\,x + \cdots$ である．ここで $x = GM/(c^2\rho)$．

$$\begin{aligned} &\beta = 1, \quad \gamma = 1 \qquad (\text{一般相対論}) \\ &\beta = 0, \quad \gamma = 0 \qquad (\text{ニュートン理論}) \end{aligned} \tag{23.6}$$

ニュートン理論では3次元ユークリッド空間が使われており，よって $A(r) = 1$, $\gamma = 0$ である．ニュートンの極限 $g_{00} = B(r) \approx 1 + 2\Phi/c^2$ から $\beta = 0$ となる．われわれは次の節で，場の方程式の解から一般相対論の対応する値 ($\beta = 1$, $\gamma = 1$) を得る．

ニュートンの天体力学は，$\beta = \gamma = 0$ と非相対論的極限 ($v \ll c$) の運動方程式からもたらされる．(23.5) に書かれている項は，ニュートン理論を越えた修正の際に考慮されなければならない．$v^2 \sim GM/r$ であるので，オーダー $v^2/c^2$ のいろいろな項を同時に運動方程式で考慮しなければならない．非相対論的粒子に対しては，$g_{00} = B$ に対する展開 (23.5) は $g_{11} = A$ に対するそれよりも（$v^2/c^2$ に関して）1 オーダーだけ進んでいなければならない．というのは，$g_{00}(u^0)^2 \sim g_{00}\, c^2$，かつ $g_{11}(u^1)^2 \sim g_{11}\, v^2$ であり，これらを同じオーダーまで正しく取り扱うには，$B$ に対して一つ高階の展開が必要である．

## クリストッフェル記号

標準形の計量テンソルは対称形であり

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{23.7}$$

そして

$$(g^{\mu\nu}) = \text{diag}\left( \frac{1}{B(r)}, -\frac{1}{A(r)}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \right) \tag{23.8}$$

である．クリストッフェル記号

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{g^{\sigma\nu}}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) \tag{23.9}$$

のゼロでない成分は

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{B'}{2B}, &&\Gamma^1_{00} = \frac{B'}{2A}, &&\Gamma^1_{11} = \frac{A'}{2A} \\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, &&\Gamma^1_{22} = -\frac{r}{A}, &&\Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{A} \\
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, &&\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta, &&\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{23.10}$$

である．$A > 0$, $B > 0$ である次の式

$$|g| = r^4 AB\sin^2\theta \tag{23.11}$$

から，また

$$\left(\Gamma^{\rho}_{\mu\,\rho}\right) = \left(\frac{\partial\,\ln\sqrt{|g|}}{\partial\,x^{\mu}}\right) = \left(0,\ \frac{2}{r} + \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B},\ \cot\theta, 0\right) \tag{23.12}$$

を得る．

## リッチ・テンソル

リッチ・テンソル

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\,\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial\,x^{\nu}} - \frac{\partial\,\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial\,x^{\rho}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\,\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} \tag{23.13}$$

に対して

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial\,\Gamma^{\rho}_{0\rho}}{\partial\,x^0} - \frac{\partial\,\Gamma^{\rho}_{00}}{\partial\,x^{\rho}} + \Gamma^{\sigma}_{0\rho}\,\Gamma^{\rho}_{\sigma 0} - \Gamma^{\sigma}_{00}\,\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} \\
&= -\frac{B''}{2A} + \frac{A'B'}{2A^2} + \frac{B'^2}{2AB} - \frac{B'}{2A}\left(\frac{2}{r} + \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B}\right) \\
&= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA}
\end{aligned} \tag{23.14}$$

と次の表式を得る．

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} \tag{23.15}$$

$$R_{22} = -1 - \frac{r}{2A}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} \tag{23.16}$$

$$R_{33} = R_{22}\,\sin^2\theta \tag{23.17}$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad \mu \neq \nu \quad \text{のとき} \tag{23.18}$$

**演習**

23.1: 計量

$$d\,s^2 = B(r)\,c^2 dt^2 - A(r)\,dr^2 - C(r)\,r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right)$$

に $A(r) = G(r) + C(r)$ を代入せよ．次の表式

$$\frac{d\,\rho}{\rho} = \frac{d\,r}{r}\sqrt{1 + \frac{G(r)}{C(r)}}$$

によって新しい半径座標 $\rho$ を導入する．すると上の線素は

$$d\,s^2 = H(\rho)\,c^2\,d\,t^2 - J(\rho)\left(d\,\rho^2 + \rho^2\,\theta^2 + \rho^2\,\sin^2\theta\,d\,\phi^2\right) \tag{23.19}$$

となることを示せ．ここで $H(\rho) = B(r)$ であり，$J(\rho) = r^2\,C(r)/\rho^2$ である．これはいわゆる**等方形**の計量である．

# 24 シュワルツシルト計量

球形で静的な質量分布をしている物体の外部の重力ポテンシャル $g_{\mu\nu}$ を定める．源の項をもたない場の方程式 $R_{\mu\nu}=0$ に標準形の $g_{\mu\nu}$ をあてはめて解くことにする．場の方程式の解はシュワルツシルト(Schwarzschild)計量を与える．

## 電気力学との比較

解の様子を，電気力学を例にして説明しよう．球形で静的な場合には4元流れ密度は $(j^\alpha)=(c\,\varrho_e(r),\,0,\,0,\,0)$ の形である．4元ポテンシャルには

$$(A^\alpha)=(\varPhi_e(r),\,0,\,0,\,0) \tag{24.1}$$

が当てられる．これは $g_{\mu\nu}$ に対する標準形の表式に対応する．電荷分布は空間的に区切られており，$r>r_0$ に対して $\varrho_e=0$ であるとする．電荷分布の外部では，場の方程式（マクスウエル方程式）は解ける．

$$F^{\alpha\beta}{}_{|\beta}=0 \quad \overset{(24.1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{r}\,\frac{d^2(r\,\varPhi_e)}{dr^2}=0 \quad \Longrightarrow \quad \varPhi_e=\frac{a}{r}+b \tag{24.2}$$

積分定数 $a$ は総電荷数に等しく，また定数 $b$ は勝手にゼロと置いてよい．以降では，この類推的なやり方を一般相対論に当てはめることにする．

## アインシュタインの場の方程式の解

静的かつ球状で境界のある質量分布をもつ物体から始めよう．

$$\varrho(r)\begin{cases}\neq 0 & (r\leq r_0)\\ =0 & (r>r_0)\end{cases} \tag{24.3}$$

この質量分布をもつ物体の内部圧力 $P(r)$ もまた(24.3)の形であろう．この物体の平均の速度場は静的な場合，$(u^\mu)=\left(u^0,\,0,\,0,\,0\right)$ に等しく，かつ $u^0=\mathrm{const.}$ である．よってエネルギー運動量テンソル，すなわち場の方程式の源の項は時間に依存せず球対称である．したがって，静的で等方的な解があるべきで

ある．その解を見いだすために表式(23.3)

$$\left(g_{\mu\nu}\right) = \mathrm{diag}\left(B(r),\, -A(r),\, -r^2,\, -r^2\sin^2\theta\right) \qquad (24.4)$$

から始める．物体の**外側**では

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad (\, r \geq r_0\,) \qquad (24.5)$$

が成り立たなければならない．源の項はここでは現れないが，前提(24.4)に解の形に対する特性（球状で静的）が与えられている．

表式(24.4)のために，式(24.5)の解は一義的に定まる．この解については，座標変換によって物理的には同等の別の解に変えることができる．これは電気力学の場合のゲージ変換に対応している．一方，(24.5)はまた物理的に別の解（たとえば波動解）をもっている．

計量テンソル(24.4)に対応する $R_{\mu\nu}$ は，(23.14)–(23.18)によって与えられる．(24.5)は $\mu \neq \nu$ に対して満たされるが，これは自明であり，さらに $R_{22} = 0$ から $R_{33} = 0$ となる．かくして(24.5)は三つの方程式になる．

$$R_{00} = 0, \qquad R_{11} = 0, \qquad R_{22} = 0 \qquad (24.6)$$

次の式

$$\frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} = -\frac{1}{r\,A}\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) = 0 \qquad (24.7)$$

から，われわれは

$$\frac{d}{d\,r}\,\ln\left(A\,B\right) = 0 \qquad (24.8)$$

または

$$A(r)\,B(r) = \mathrm{const.} \qquad (24.9)$$

を得る．(23.4)から定数は 1 であるということが出てきて

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} \qquad (24.10)$$

を得る．(23.16)の $R_{22}$ と(23.15)の $R_{11}$ にこれを代入すると

$$R_{22} = -1 + r\,B' + B = 0 \qquad (24.11)$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2\,B} + \frac{B'}{r\,B} = \frac{r\,B'' + 2\,B'}{2\,r\,B} = \frac{1}{r\,B}\,\frac{d\,R_{22}}{d\,r} = 0 \qquad (24.12)$$

となる．(24.11)によって(24.12)は自動的に満たされる．われわれは(24.11)を

$$\frac{d(r\,B)}{d\,r} = 1 \tag{24.13}$$

のように書き，積分して $r\,B = r + \text{const.}$ を得る．ここで定数を $-2\,a$ と表す．これによって重力場は

$$B(r) = 1 - \frac{2\,a}{r}, \qquad A(r) = \frac{1}{1 - 2\,a/r} \qquad (r \geq r_0) \tag{24.14}$$

のように与えられる．源の項をもたないアインシュタインの場の方程式に対するこの解は，1916 年，シュワルツシルトによって見いだされた．**シュワルツシルト計量**の線素は次のように書かれる．

**シュワルツシルト計量：**

$$d\,s^2 = \left(1 - \frac{2\,a}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2\,a/r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{24.15}$$

積分定数 $a$ の意味はニュートン極限(21.2)からわかる．

$$g_{00} = B(r) \xrightarrow{r\to\infty} 1 + \frac{2\,\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2\,G\,M}{c^2\,r} = 1 - \frac{2\,a}{r} \tag{24.16}$$

$a$ の代わりにしばしば**シュワルツシルト半径** $r_\mathrm{S}$

$$r_\mathrm{S} = 2\,a = \frac{2\,G\,M}{c^2} \qquad \text{シュワルツシルト半径} \tag{24.17}$$

が用いられる．

## シュワルツシルト計量に関する議論

シュワルツシルト計量の応用はいろいろあるが，まず太陽の重力場に応用してみよう．太陽のシュワルツシルト半径は

$$r_{\mathrm{S},\odot} = \frac{2\,G\,M_\odot}{c^2} \approx 3\,\mathrm{km} \tag{24.18}$$

である．太陽の質量 $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ は漸近的な重力場から実験的に決められる．シュワルツシルト半径は太陽の半径 $R_\odot \approx 7 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ よりもはるかに小さい．

$$\frac{r_{\mathrm{S},\odot}}{R_\odot} = \frac{2\,G\,M}{c^2\,R_\odot} \approx 4 \times 10^{-6} \tag{24.19}$$

シュワルツシルト計量は領域 $r \geq r_0 = R_\odot$ で成り立つから，その領域ではミンコフスキー計量からのずれは非常に小さい．

$$\frac{r_\mathrm{S}}{r} \leq \frac{r_\mathrm{S}}{r_0} \overset{\text{(Sun)}}{=} 4 \times 10^{-6} \tag{24.20}$$

太陽系の他の天体に対してはこの数値はもっと小さい．

角度座標はユークリッド空間のものと同じ意味をもっているということを前節で議論した．座標 $t$ は無限のかなたに静止している時計が示している時刻である．この時計に対しては $d\tau = d\,s_{\mathrm{clock}}/c = dt$ が成り立つ．$g_{11} \neq -1$ のために，$r$-座標の意味はミンコフスキー計量の半径座標の意味からずれる．しかし，(24.20)のせいでこのずれは小さい．

シュワルツシルト計量はミンコフスキー計量に漸近的に移行する．それゆえ恒星天を基準空間と取ることができる．特に，この計量では（光の湾曲，近日点移動，コマの歳差等に関する）角度変化の計算値は恒星天を基準として測られた角度変化と等しい．

シュワルツシルト計量テンソルの係数は $r = r_\mathrm{S}$ で特異になる．しかし，このことは必ずしも空間の特異点を意味してはいない．たとえば，通常の座標 $x^1 = \theta, x^2 = \phi$ を使って球面を記述すると，$g^{22} = 1/\sin^2\theta$ は北極点で特異になる．ところが空間は，そこでは他のすべての点と同じ性質をもっている．事実，シュワルツシルト計量で記述される空間は，$r = r_\mathrm{S}$ で特異ではない（45節）．したがって自由落下している粒子の，たとえば，$dr/d\tau$ にはいかなる特異性も現れない．しかし，$r_\mathrm{S}$ 点は物理的には際立った特徴をもつ．すなわち $r$ に静止している時計は，(12.3)によって時間 $d\tau = \sqrt{B}\,dt$ を示す．よって $dt/d\tau$ は $r \to r_\mathrm{S}$ において発散する（ここで $t$ は無限のかなたに静止している時計の時刻である）．これは，$r = r_\mathrm{S}$ で放射された光子は無限に大きい赤方変異をこうむることを意味する．これはまた，$t$ は $r \leq r_\mathrm{S}$ の領域での事象

に適した座標時ではないことを暗示している．半径 $r_0 \le r_S$ をもった星は**ブラックホール**と呼ばれる（48 節）．というのは，その表面からいかなる光子も外側（すなわち $r > r_S$ の領域）へは抜け出すことはできないからである．45-47 節で $r = r_S$ におけるシュワルツシルト計量の特性をさらにくわしく議論する．しかしながら，(24.20)のために太陽系への応用に関してはこの領域は意味がない．

シュワルツシルト計量はまた，$r = 0$ に特異性をもっている．これは(24.2)の $\Phi_e$ の特異性に類似のものである．われわれが，解の成り立つ範囲 $r \ge r_0$ を $r_0 \to 0$ として広げようとすると，この有効領域の下限は $r = 0$ にある点電荷になってしまう．$r = 0$ でのシュワルツシルト計量の特異性は，この点電荷に対応している．

シュワルツシルト計量は $r_S/r$ のべき乗で展開できる．ロバートソン展開(23.5)と比較すると

$$\beta = 1, \qquad \gamma = 1 \qquad (\text{一般相対論}) \tag{24.21}$$

であることがわかる．これに対してニュートンの重力理論は $\beta = \gamma = 0$，すなわち(23.6)を示唆する．やや異色な相対論的場の理論の例として，ブランス－ディッケ理論（21 節の最後の小節を見よ）を選んでもいいだろう．この理論では $\beta = 1$，そしてさらにパラメター $\omega$ を使って $\gamma = (\omega+1)/(\omega+2)$ となる．このように，(24.21)からのずれは十分に考えられる．したがって $\beta = \gamma = 1$ は検証を受けなければならない一般相対論の予測であることがわかる．

## 空間の曲がり

場の方程式によると $R_{\mu,\nu}$ は源のある領域でのみゼロではない（“曲がりは質量密度に比例する”）．シュワルツシルト計量は源なしの空間における解なので，この計量に対して $R_{\mu\nu} = 0$ と $R = 0$ が成り立つ．しかしながら（座標 $r, \theta, \phi$ をもつ）シュワルツシルト計量の 3 次元部分空間は曲がっている．すなわち，$R_{\mu\eta} = 0$ には質量周辺の空間の曲がりをも含まれているのである．

# 25 中心力場における運動

古典的なケプラー問題の相対論的一般化，すなわち，中心対称で静的な重力場中の物体の運動を調べる．この議論は光子の運動も含んでいる．

## 運動方程式

(11.9) と (11.12) により，重力場中の粒子の軌道 $x^\kappa(\lambda)$ に関して

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\lambda^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda} \tag{25.1}$$

と

$$g_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = c^2\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 = \begin{cases} c^2 & (m \neq 0) \\ 0 & (m = 0) \end{cases} \tag{25.2}$$

とが成り立つ．質量をもつ粒子に対して，われわれは $\lambda = \tau$ を使う．一方，質量のない粒子には $d\tau = 0$ であるので，別の軌道パラメター $\lambda$ が選ばれている．

中心対称で静的な重力場は，計量

$$ds^2 = B(r)\,c^2dt^2 - A(r)\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) \qquad (r \geq r_0) \tag{25.3}$$

によって記述される．$A(r)$ と $B(r)$ に対しては，後ほどシュワルツシルト解，またはロバートソン展開が代入される．使われる座標系は

$$\left(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3\right) = (ct,\, r,\, \theta,\, \phi) \tag{25.4}$$

である．方程式 (25.1)–(25.4) は，これから解こうとしている相対論的ケプラー問題を定義している．(23.10) のクリストッフェル記号を使って，(25.1) の個々の成分を具体的に書き下す．

$$\frac{d^2x^0}{d\lambda^2} = -\frac{B'}{B}\frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} \tag{25.5}$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{B'}{2A}\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 - \frac{A'}{2A}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 ds + \frac{r}{A}\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \frac{r\sin^2\theta}{A}\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \tag{25.6}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} + \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \tag{25.7}$$

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r}\frac{d\phi}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} - 2\cot\theta\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\phi}{d\lambda} \tag{25.8}$$

方程式(25.7)は明らかに

$$\theta = \frac{\pi}{2} = \text{const.} \tag{25.9}$$

で解ける．一般性を失わずにこのように制限してよい．すなわち，ある定められた時間 $t_0$ に，座標系を $\theta = \pi/2$ と $d\theta/d\lambda = 0$ になるように回転させることができる．するとそれにともなって，場所のベクトルと速度ベクトルとは $\theta = \pi/2$ の平面にくる．さて(25.7)から $d^2\theta/d\lambda^2 = 0$ となり，したがって $\theta(\lambda) \equiv \pi/2$ である．よって全体の軌道は赤道面にある．

(25.9)に対しては，(25.8)は

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\lambda}\left(r^2\frac{d\phi}{d\lambda}\right) = 0 \tag{25.10}$$

となる．これは

$$r^2\frac{d\phi}{d\lambda} = \ell = \text{const.} \tag{25.11}$$

を与える．非相対論的ケプラー問題では一般的であるが，問題の等方性に基づいて(25.9)と(25.11)とを直接に書き下すことができる．すなわち，等方性のために角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ は保存され，$\boldsymbol{\ell}$ の方向は一定である．それで座標系は，$\boldsymbol{e}_z \parallel \boldsymbol{\ell}$ であるように選ぶことができる．これから(25.9)が出る．$\boldsymbol{\ell}$ の絶対値は一定であるので(25.11)が成り立つ．ここで積分定数 $\ell$ は，質量あたりの角運動量である．

われわれは(25.5)を

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\ln\frac{dx^0}{d\lambda} + \ln B\right) = 0 \tag{25.12}$$

のように書き，これを積分する．

$$B\,\frac{d\,x^0}{d\lambda} = F = \text{const.} \tag{25.13}$$

(25.9) と (25.11)，(25.13) を残されている方程式 (25.6) に使うと

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{F^2\,B'}{2\,A\,B^2} + \frac{A'}{2\,A}\left(\frac{d\,r}{d\lambda}\right)^2 - \frac{\ell^2}{A\,r^3} = 0 \tag{25.14}$$

を得る．これに $2\,A(dr/d\lambda)$ を掛けて

$$\frac{d}{d\lambda}\left[A\left(\frac{d\,r}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{F^2}{B}\right] = 0 \tag{25.15}$$

を得る．これを積分すると次の式になる．

$$A\left(\frac{d\,r}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} = -\varepsilon = \text{const.} \tag{25.16}$$

この動径方程式は中心となる運動方程式である．角度の変化は (25.9) と (25.11) とから決められ，$t$ と $\lambda$ との間の関係は (25.13) によって決められる．かくして，すべての運動方程式は一回積分される．

(25.16) をもう一度積分すると $r = r(\lambda)$ が得られる．この関数を (25.11) と (25.13) とに挿入すると，それらの積分 $\phi = \phi(\lambda)$ と $t = t(\lambda)$ が得られる．$\lambda$ を消去すると $r = r(t)$ と $\phi = \phi(t)$ になる．$\theta = \pi/2$ を加えてこれらは完全な解となる．ここに現れる積分は，一般には初等的にはできない．次の小節以降でシュワルツシルト計量に対する解をくわしく議論することにする．

ところで，(25.2) を変形してみよう．

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = B\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 - A\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \varepsilon \tag{25.17}$$

中間の各項に (25.9) と (25.11)，(25.13)，(25.16) を使うと最右辺が出る．そして (25.17) と (25.2) とから

$$\varepsilon = \begin{cases} c^2 & (m \neq 0) \\ 0 & (m = 0) \end{cases} \tag{25.18}$$

が得られる．しかしながらまだ，(25.11) そして (25.13)，(25.16) に二つの積分定数 $F$ と $\ell$ が残されている．類似の非相対論的取扱いにおいては，エネルギー $E$ と角運動量 $\ell$ が積分定数として現れる．

### 軌道

軌道 $\phi = \phi(r)$ を平面 $\theta = \pi/2$ 上に定めよう．まず，(25.16) は

$$\frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{\frac{F^2/B - \ell^2/r^2 - \varepsilon}{A}} \tag{25.19}$$

となる．これを使って

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dr} = \frac{\ell}{r^2}\sqrt{\frac{A}{F^2/B - \ell^2/r^2 - \varepsilon}} \tag{25.20}$$

を得，それをもって不定積分

$$\boxed{\phi(r) = \int \frac{dr}{r^2}\frac{\sqrt{A(r)}}{\sqrt{\dfrac{F^2}{B(r)\ell^2} - \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{\varepsilon}{\ell^2}}}} \tag{25.21}$$

を得る．これが運動平面上の軌道 $\phi = \phi(r)$ を決める．質量をもつ粒子 ($\varepsilon = c^2$) に対しては，これは二つの積分定数 ($F$ と $\ell$) に依存する．散乱に対しては，これらの定数は衝突パラメターと初速度によって表される．質量のない粒子 ($\varepsilon = 0$) に対しては，軌道は実際上一つの積分定数（$F/\ell$ または衝突パラメター）に依存する．

## シュワルツシルト計量に対する運動

われわれはシュワルツシルトの解

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} = 1 - \frac{2a}{r} = 1 - \frac{r_{\mathrm{S}}}{r} \tag{25.22}$$

と簡略形

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda}, \qquad \dot{r} = \frac{dr}{d\lambda}, \qquad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\lambda} \tag{25.23}$$

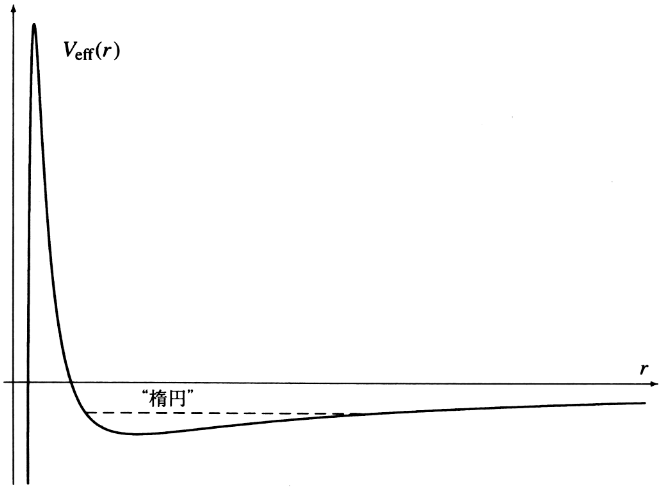



**図 25.1**: 有限質量粒子に対する距離 $r$ の関数としての実効ポテンシャル $V_{\text{eff}}$. この曲線はニュートンの重力ポテンシャル $-G\,M/r$, そして遠心力の項$(\propto +\ell^2/r^2)$, 相対論的な項$(\propto -1/r^3)$の合わさったものである. 相対論的な項は非常に小さな半径 $r \sim r_{\text{S}}$ で重要になる. 太陽系では $r_{\text{S}} \ll R_{\odot} \ll r_{\text{P}}$ が成り立つ. ここで $r_{\text{P}}$ は, 太陽中心からの惑星の距離である.

を, (25.9) と (25.11), (25.13), (25.16) に代入する.

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad c\dot{t}\left(1 - \frac{2\,a}{r}\right) = F, \qquad r^2\,\dot{\phi} = \ell \tag{25.24}$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{a\,\varepsilon}{r} + \frac{\ell^2}{2\,r^2} - \frac{a\,\ell^2}{r^3} = \frac{F^2 - \varepsilon}{2} = \text{const.} \tag{25.25}$$

$\theta = \pi/2$ は軌道面を定める. その隣の方程式は座標時 $t$ と軌道パラメター $\lambda$ の関係を決める. (25.24) の最右辺の方程式は角運動量とみなされ, (25.25) はエネルギーに対応する.

動径方程式 (25.25) を次の形に書くことにする.

$$\boxed{\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = \text{const.}} \tag{25.26}$$

ここで有効ポテンシャルは

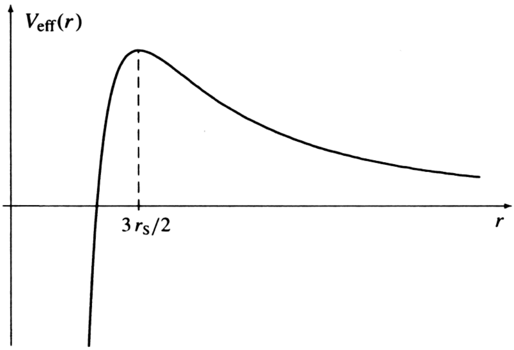



**図 25.2**: 静止質量ゼロの粒子に対する距離 $r$ の関数としての有効ポテンシャル $V_{\rm eff}$.

$$V_{\rm eff}(r)=\begin{cases} -\dfrac{G\,M}{r}+\dfrac{\ell^2}{2\,r^2}-\dfrac{G\,M\,\ell^2}{c^2\,r^3} & (m\neq 0)\\[2ex] \dfrac{\ell^2}{2\,r^2}-\dfrac{G\,M\,\ell^2}{c^2\,r^3} & (m=0)\end{cases} \tag{25.27}$$

である．上の式で $a=G\,M/c^2$ を使った．図 25.1 と図 25.2 に考えられうる有効ポテンシャルが描かれている．

(25.26) の形式的な解 $r=r(\lambda)$ は積分

$$\lambda=\pm\int\frac{dr}{\sqrt{2\,[\mathrm{const.}-V_{\rm eff}(r)]}} \tag{25.28}$$

によって与えられる．$V_{\rm eff}$ にある相対論的な項($\propto 1/r^3$)のために，これは楕円積分になって初等的な関数では表すことはできない．

しかしながら，解の定性的な様子は $V_{\rm eff}(r)$ の図によってグラフ的に理解できる．このために水平の直線(- - -)を書き入れ，(25.26) の const. に対応させる(図 25.1)．そうすると，$V_{\rm eff}(r)$ への縦の距離は運動エネルギー $\dot{r}^2/2$ を与える．

さて，$m\neq 0$ に対する有効ポテンシャルを少しくわしく見てみよう．引力であるニュートンの重力ポテンシャル $-G\,M/r$ は漸近的には支配的である．しかし，だんだん小さくなる半径に対して遠心力ポテンシャル $\ell^2/2\,r^2$ が効

いてきて，$\ell$ が小さすぎないかぎり，$V_{\text{eff}}$ の値を正にする．さらに小さい半径に対しては引き合う相対論的な項

$$-\frac{GM}{r}\frac{\ell^2}{c^2 r^2} \overset{(v \ll c)}{\sim} -\frac{GM}{r}\frac{v^2}{c^2} \tag{25.29}$$

が最終的に支配的になる．ポテンシャル $1/r$ と $1/r^2$，$1/r^3$ をもつ項の足し合わせが，図 25.1 に示された曲線になる．動径方程式(25.26)は，項(25.29)のためと，さらに $\dot{r} = dr/d\tau$ が $dr/dt$ とは違っているということのために，非相対論の場合と異なっている．双方ともその引き起こすずれは $v^2/c^2$ のオーダーである．

最小値の領域では，動径方程式は束縛運動の解を与える．グラフを使った議論によると，その運動には二つの折返し点があり，その間で解は振動する（図 25.1）．非相対論の場合の対応する軌道はよく知られたケプラーの楕円である．楕円軌道からのずれが相対論効果により生じるが，近日点移動がその例である（27 章）．また特別な例として $\dot{r} = 0$ となる円運動が可能であり，そのときは(25.26)の定数がポテンシャルの最小値に等しくなる．定数がポテンシャル最大値に等しいときの解は不安定である．というのは，わずかな摂動で $\dot{r}$ が指数関数的に増大する．(25.26)の定数が正のときは束縛されない散乱解（非相対論の場合は双曲線解）を得る．定数がポテンシャルの最大値より大きければ，粒子は中心に向かって落ち込む．

ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ の最大値と最小値では $dV_{\text{eff}}(r)/dr = 0$ となる．これから $m \neq 0$ に対しては

$$\frac{c^2}{\ell^2}\,r^2 - 2\,\frac{r}{r_{\text{S}}} + 3 = 0 \tag{25.30}$$

が出る．この 2 次方程式が二つの実根をもつためには，$3\,c^2/\ell^2 < 1/r_{\text{S}}^2$ が成り立たなければならない．このことから，角運動量 $\ell$ がしきい値

$$\ell_{\text{cr}} = \sqrt{3}\,r_{\text{S}}\,c \tag{25.31}$$

より上にあるとき，図 25.1 のように一つの最大値と一つの最小値が存在する．$\ell \to \ell_{\text{cr}}$ に対しては角運動量に基づく障壁はどんどん小さくなり，$\ell = \ell_{\text{cr}}$ に

なるとついに最大値と最小値が一致する．$\ell < \ell_{\rm cr}$ に対しては，ポテンシャルは単調に中心に向かって落ち込む．すなわち，外からやってきた粒子は中心に向かって落ち込む．

光子に対しては，$V_{\rm eff}$ の二つの項は $\ell^2$ に比例している．したがって，有効ポテンシャルの形（図 25.2）は $\ell$ に依存しない．そしてポテンシャルは

$$r_{\rm max} = 3\,a = \frac{3\,r_{\rm S}}{2} \tag{25.32}$$

で一つの最大値をもつ．この場合，光子は $r = r_{\rm max}$ を半径とする円運動をすることはできるが不安定である．(25.26)の定数が $V_{\rm eff}(r_{\rm max})$ より小さいときは，外から入ってきた光子は散乱され，定数がそれより大きいときは捕らえられる．

運動方程式(25.26)は，$r \le r_{\rm S}$ の領域で困難なく解くことができる．しかし，（図 25.1 の最大値の近くにある）半径 $r = r_{\rm S}$ ははっきりとは示せない．そのかぎりでは，$r = r_{\rm S}$ は空間の特異点ではなく，座標の特異点ということは容易に推測できる．しかもシュワルツシルト計量それ自身 $r \le r_{\rm S}$ に対しては使えない．もし使ったとすると，たとえば静止している時計に対しては $ds^2 = c^2 d\tau^2 = (1 - r_{\rm S}/r)\, c^2 dt^2 < 0$ となってしまい，$d\tau$ は虚数になる．$r \ge r_0$（シュワルツシルト計量(25.3)が成り立つ範囲）でなければならないので，この問題は（$r_0 \gg r_{\rm S}$ であるような）“正常”な対象に対しては重要ではない．しかしわれわれは，この問題をブラックホールの議論の際に再び取り上げることにする．

## 演習

25.1: 人工衛星が半径 $r$ の円軌道を回っているものとする．衛星の時計の表示 $\tau$ と無限のかなたに静止している時計の表示 $t$ との比 $d\tau/dt$ を計算せよ．これを演習 12.1 の結果と比較せよ．

25.2: 宇宙船が質量 $M$ のブラックホールに自由落下している．漸近的に近づく速度は $v_\infty = c/\sqrt{2}$ であり，衝突パラメターは $b = 4\,r_{\rm S}$ であるとせよ．この宇宙船は中心に落下するか．

25.3: 球状の重力場（シュワルツシルト計量）で質量粒子の中心落下を調べる．まず次のことを示せ．

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{c}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3\,r_S}{r} - 1} \tag{25.33}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{c}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\sqrt{\frac{3\,r_S}{r} - 1} \tag{25.34}$$

落下は $r(0) = 3\,r_S$ から速さゼロで始まるものとする．$r(\tau)$ の様子を示せ．どれほどの固有時 $\tau_0$ 後に粒子は中心に着くか．$r \approx r_S$ に対して，$r(t)$ に関する運動方程式を解け．さらに光子に対して $r \approx r_S$ のときの $r(t)$ を定めよ．

# 26 光の湾曲

光線は重力場で曲げられる．ここでは太陽の縁をかすめる光線の曲がりを計算する．星からの光に対してはこの曲がりは日食の間に観測されるが，クエーサー(準星)からのラジオ波の曲がりに関しては日食は必ずしも必要としない．

重力場における軌道 $r = r(\phi)$ は(25.21)で与えられる．光に対しては $\varepsilon = 0$ となり，次の式が得られる．

$$\phi(r) = \phi(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} \frac{\sqrt{A(r')}}{\sqrt{\dfrac{F^2}{B(r')\ell^2} - \dfrac{1}{r'^2}}} \tag{26.1}$$

積分の始点として太陽からの最短距離 $r_0$ を選び，そして $\phi(r_0) = 0$ とおく．$r_0$ から $r = \infty$ までの間に角度は $\phi(\infty)$ だけ変化する．そして図 26.1 に描かれている軌道に沿って，半径ベクトルは $2\,\phi(\infty)$ だけ回転する．もし直線軌道だとしたらこの角度は $\pi$ となる．よって，重力場における光の曲がり $\varDelta\phi$ は

$$\varDelta\phi = 2\,\phi(\infty) - \pi \qquad (\phi(r_0) = 0) \tag{26.2}$$

に等しい．$A(r) \neq 1$ であるので，3 次元空間は非ユークリッドである．この意味で，図 26.1 は留保付きで見なければならない．しかしながら，遠方では $A \to 1$ と $B \to 1$ が成り立つので，そこでは光線は（図のように）ユークリッド空間の直線になる．両直線部分は恒星天に対して方向が異なる（恒星は使われている座標で固定された角度をもつ）．漸近的な両直線部分を除いた光の軌道は空間の非ユークリッド性に関係しており，このことは(26.1)で正確に考慮されている．

$r_0$ で $r(\phi)$ は極小である．すなわち

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)_{r_0} = 0 \tag{26.3}$$

(26.1)の被積分関数は $d\phi/dr$ に等しい．よって(26.3)から

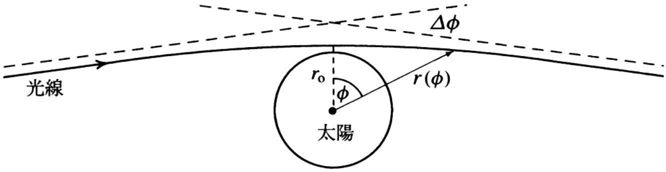



**図 26.1**: 太陽の重力場で，光線は角度 $\Delta\phi$ だけ曲げられる．最短距離 $r_0$ に関して軌道は対称である．実際の曲がり角 $\Delta\phi = 1.75''$ は描かれているよりはるかに小さい．さらにまた，この図はあまりに厳密に受け取るべきではない．というのは，重力場では三次元空間は（図とは違って）ユークリッド的ではないからである．

$$\frac{F^2}{\ell^2} = \frac{B(r_0)}{r_0^2} \tag{26.4}$$

が得られる．これを使って定数 $F^2/\ell^2$ を消去し次の式を得る．

$$\phi(\infty) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \frac{\sqrt{A(r)}}{\sqrt{\dfrac{r^2}{r_0^2}\dfrac{B(r_0)}{B(r)} - 1}} \tag{26.5}$$

この積分をロバートソン展開の $A(r)$ と $B(r)$

$$A = 1 + \gamma\,\frac{2a}{r} + \cdots \qquad \text{および} \qquad B = 1 - \frac{2a}{r} + \cdots \tag{26.6}$$

を使って見積もる．この見積もりを $a/r$ のオーダーまで行うことにする．次の式

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{r_0^2}\frac{B(r_0)}{B(r)} - 1 &\approx \frac{r^2}{r_0^2}\left[1 + 2a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right] - 1 \\ &= \left[\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right]\left[1 - \frac{2ar}{r_0(r+r_0)}\right] \end{aligned} \tag{26.7}$$

を使って

$$\begin{aligned} \phi(\infty) &= \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}\,\frac{r_0}{r}\left(1 + \gamma\,\frac{a}{r} + \frac{ar}{r_0(r+r_0)}\right) \\ &= \left[\arccos\left(\frac{r_0}{r}\right) + \gamma\,\frac{a}{r_0}\,\frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} + \frac{a}{r_0}\sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}}\right]_{r_0}^{\infty} \end{aligned} \tag{26.8}$$

を得る．これは

$$\phi(\infty) = \frac{\pi}{2} + \gamma\,\frac{a}{r_0} + \frac{a}{r_0} \tag{26.9}$$

となる．これと (26.2) とから，$\varDelta\phi$ に対して次の式を得る．

$$\boxed{\varDelta\phi = \frac{4a}{r_0}\,\frac{1+\gamma}{2} \qquad \text{光線の曲がり}} \tag{26.10}$$

太陽にわずかに触れて通る光線に対しては

$$r_0 \approx R_\odot \approx 7\times10^5\,\mathrm{km} \quad \text{および} \quad a = \frac{G\,M_\odot}{c^2} \approx 1.5\,\mathrm{km} \tag{26.11}$$

が成り立つ．これと $\pi \Leftrightarrow 180\times3600''$ を使えば (26.10) は

$$\varDelta\phi = 1.75''\,\frac{1+\gamma}{2} \qquad \text{（太陽による光の湾曲）} \tag{26.12}$$

となる．古典的な（1919 年 5 月 29 日に初めてなされた）観測は, 皆既日食の間に太陽の縁の近くにある星の位置の測定である．このとき，この星の位置は他の恒星に対して (26.12) で与えられた角度だけずれて現れる．当然，この星が見えるためには日食が必要である．実験結果を解析する際の最大の困難は，太陽大気中での波の屈折をどう考慮に入れるかということである．

新しい測定法はクエーサー（Quasar, 準星）を使う（クエーサーの簡潔な記述は 48 節の終わりにある）．電波源のクエーサーが年に 1 回太陽に覆い隠されるような位置にあるとすれば，日食は観測に必要ではない．このようにして，超長基線電波干渉計 (VLBI) [3)] を使ってパラメター $\gamma$ に対する非常に精密な下記の値 [文献 9] が得られた．

$$\gamma = \begin{cases} 1.0 \pm 0.1 & \text{（光学的）} \\ 0.99984 \pm 0.00028 & \text{（クエーサー，VLBI）} \end{cases} \tag{26.13}$$

上の行の値は光学領域の星の古典的な観測に基づいている．

観測結果 (26.13) は一般相対論の値 $\gamma = 1$ が正しいことを示し，ニュートンの値 $\gamma_{\mathrm{N}} = 0$ は排除される．ニュートンの値は $B = g_{00} = 1 + 2\varPhi/c^2$ と

[3)] 訳注：very long baseline interferometer．遠く離れたアンテナを干渉性があるようにつないだ電波干渉計．

$A = -g_{11} = 1$ をもつ計量からもたらされる（平坦な3次元空間）．したがって，ニュートンならば半分の大きさの光の曲がりを予測したであろう[4)]．

ニュートン力学の枠内では，光の屈折は次のようにして計算することができる．運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -m\nabla\Phi$ で質量 $m$ をどんどん小さくする．そして光速で動く物体の湾曲を計算する．第2法則で質量を小さくすること（本質的には光子に対してゼロにすること）は，ニュートンにとって何ら問題はなかったであろう．というのは，光は（未知ではあるが有限の質量をもつ）粒子から構成されているということから彼は考えを進めたからである．それに対して，光または物質粒子に対するわれわれの軌道方程式(25.1)は等価原理，すなわち，局所慣性系での光や粒子の直線運動に基づいている．

## 重力レンズ

光の曲がりはさらに**重力レンズ**という華々しい効果を生み出す．この効果によって，（われわれとクエーサーの間の）銀河でクエーサーの電波は曲げられる．1979年，ウォルシュたち[5)]は非常によく似たスペクトルをもち，隣り合って存在するクエーサー(Q0957+561)を見つけた．スペクトルの一致は，当時知られていた1500のクエーサーのどの組合せよりもよい．引きつづき行われた研究で，それらは同じクエーサーの二つの像にすぎないことが確認された．しばらくするうちに，このようないくつかの双子のクエーサーに対して電波を曲げる銀河（通常の銀河の光はクエーサーの光よりはるかに弱い）の存在も証明された．湾曲させる重力場の中心が正確に地球とクエーサーを結ぶ直線上にあるとき，環状の像が発生する．二つ，あるいは，もっと多くの歪んだ像がその環に沿ってできることがある．都合よく並んでいる近くの星によって遠方の星の像が分裂する可能性をアインシュタイン自身すでに1936年考察している．

---

4) 訳注：(26.12)で $\gamma = 0$ とせよ．

5) D.Walsh et al., Nature 279 (1979) 381.

# 27 近日点移動

太陽を回る惑星の軌道は，ニュートンの理論では楕円である．$1/r$-ポテンシャルからのずれ（他の惑星の影響や相対論効果）は，閉じている楕円軌道からのずれを通常生み出す．このずれが小さいときは，それは楕円の回転として書き表される．観測的には太陽にもっとも近い軌道の点――近日点――の角度変化としてそのずれは計測される．ここで，相対論効果で引き起こされる近日点移動を計算する．

太陽を回る惑星の楕円軌道（図 27.1），またはそれによく似た軌道を考える．太陽と惑星間の距離の最大値と最小値を

$$r_+ = r_{\max} \qquad \text{そして} \qquad r_- = r_{\min} \tag{27.1}$$

で表示する．最大，最小の距離に対応する量を略して

$$\phi_\pm = \phi(r_\pm), \qquad A_\pm = A(r_\pm), \qquad B_\pm = B(r_\pm) \tag{27.2}$$

と書く．相対論的な軌道 $r = r(\phi)$ は $\varepsilon = c^2$ と置いた積分(25.21)から出る．$r_-$ と $r_+$ の間の角度変化に対してこの積分は

$$\phi_+ - \phi_- = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \frac{\sqrt{A(r)}}{\sqrt{\dfrac{F^2}{B(r)\,\ell^2} - \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{c^2}{\ell^2}}} = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{K(r)}} \tag{27.3}$$

となる．ある軌道を考えよう．それは近日点 $r_-, \phi_-$ から始まり，$r_+, \phi_+$ を通って再び近日点 $r_-, \phi_-$ に戻るものとする．角度 $\phi$ は，この軌道運動の間に $2\,(\phi_+ - \phi_-)$ だけ変化する．これが $2\pi$ に等しいときは，1 回の公転の後，近日点は正確に同じ位置をとる．したがって，差

$$\varDelta\phi = 2\,(\phi_+ - \phi_-) - 2\,\pi \tag{27.4}$$

は，1 回の公転の後の近日点の変化を与える．

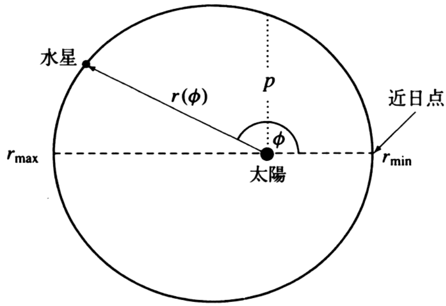



**図 27.1**: 非相対論的ケプラー問題では，惑星の軌道は $p/r = 1 + \epsilon\cos\phi$ で表される楕円である．図の楕円では離心率は $\epsilon = 1/3$ であるが，実際は水星の軌道で $\epsilon \approx 0.2$ である．相対論的（そして他の）修正によって，この楕円は近日点移動と呼ばれる回転をする．

(27.3)の被積分関数は $d\phi/dr$ に等しい．$r = r_\pm$ で $dr/d\phi = 0$ となる．よって，$K(r)$ と略記された量は $r_\pm$ でゼロとなる．すなわち

$$\frac{F^2}{\ell^2 B_+} = \frac{1}{r_+^2} + \frac{c^2}{\ell^2} \qquad \text{そして} \qquad \frac{F^2}{\ell^2 B_-} = \frac{1}{r_-^2} + \frac{c^2}{\ell^2} \tag{27.5}$$

常数 $F$ と $\ell$ は，$r_+$ と $r_-$ から下記のように決めることができる．

$$\frac{F^2}{\ell^2} = \frac{1/r_+^2 - 1/r_-^2}{1/B_+ - 1/B_-} = \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+^2 r_-^2 (1/B_+ - 1/B_-)} \tag{27.6}$$

$$\frac{c^2}{\ell^2} = \frac{B_+/r_+^2 - B_-/r_-^2}{B_+ - B_-} = \frac{r_+^2/B_+ - r_-^2/B_-}{r_+^2 r_-^2 (1/B_+ - 1/B_-)} \tag{27.7}$$

これを使えば，量 $K(r)$ は

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{F^2}{B(r)\,\ell^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{\ell^2} \\ &= \frac{r_-^2\left(\frac{1}{B(r)} - \frac{1}{B_-}\right) - r_+^2\left(\frac{1}{B(r)} - \frac{1}{B_+}\right)}{r_+^2 r_-^2\left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)} - \frac{1}{r^2} \end{aligned} \tag{27.8}$$

となる．$A(r)$ と $B(r)$ には下記のロバートソン展開を使う．

$$A(r) = 1 + \gamma \frac{2a}{r} + \cdots \tag{27.9}$$

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r} + 2(\beta - \gamma)\frac{a^2}{r^2} + \cdots \tag{27.10}$$

$$\frac{1}{B(r)} = 1 + \frac{2a}{r} + 2(2 - \beta + \gamma)\frac{a^2}{r^2} + \cdots \tag{27.11}$$

重力場での惑星の運動に対しては，$v^2/c^2 \sim a/r$ が成り立つ．項 $g_{00}\,u^0\,u^0 \sim B\,c^2$ と項 $g_{11}\,u^1\,u^1 \sim A\,v^2 \sim A\,c^2 a/r$ は $g_{\mu\nu}u^\mu\,u^\nu$ の形で隣り合って現れるので，これらの項は $a/r$ に関して同じオーダーまで取り扱わなければならない．それゆえ $B$ は，$A$ よりも $a/r$ に関してさらに高いオーダーまで展開しなければならない．

(27.11) を使うと，(27.8) から $K(r)$ は $1/r$ に関する 2 次形式になる．$r = r_\pm$ で $K_+ = K_- = 0$ が成り立つので，$K(r)$ は定数を除いて決定できる．

$$K(r) = C\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right) \tag{27.12}$$

ここで，定数 $C$ は $r \to \infty$ とおいた (27.8) と比較して決める．

$$C = \frac{r_+^2\left(1 - \frac{1}{B_+}\right) - r_-^2\left(1 - \frac{1}{B_-}\right)}{r_+ r_-\left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)} \tag{27.13}$$

(27.11) を使って

$$C = 1 - (2 - \beta + \gamma)\left(\frac{a}{r_+} + \frac{a}{r_-}\right) \tag{27.14}$$

を得る．$C$ を $a/r$ に関して 1 次のオーダーまで定めるには，$1/B$ を 2 次のオーダーまで展開しなければならないことがわかる．

行うべき積分は今や

$$\phi_+ - \phi_- = \frac{1}{\sqrt{C}}\int_{r_-}^{r_+}\frac{dr}{r^2}\left(1 + \gamma\frac{a}{r}\right)\left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)\right]^{-1/2} \tag{27.15}$$

となる．ここで

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)\sin\psi \tag{27.16}$$

と置く．$\psi=\pi/2$ と $-\pi/2$ は $r=r_+$ と $r=r_-$ に対応する．次の式

$$d\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{dr}{r^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)\cos\psi\,d\psi \tag{27.17}$$

$$\frac{1}{r_-}-\frac{1}{r}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_-}-\frac{1}{r_+}\right)(1+\sin\psi) \tag{27.18}$$

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_+}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_-}-\frac{1}{r_+}\right)(1-\sin\psi) \tag{27.19}$$

を使うと積分は

$$\phi_+-\phi_-=\frac{1}{\sqrt{C}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\psi\left[1+\frac{\gamma\,a}{2}\left(\frac{1}{r_+}+\frac{1}{r_-}\right)+\frac{\gamma\,a}{2}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)\sin\psi\right] \tag{27.20}$$

となる．ここで楕円の**パラメター** $p$ を次のようにして導入する．

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{r_+}+\frac{1}{r_-} \tag{27.21}$$

長さ $p$ の幾何学的な意味は図 27.1 に示されている．(27.20)の単純な積分は

$$\begin{aligned}\phi_+-\phi_-&=\frac{\pi}{\sqrt{C}}\left[1+\gamma\,\frac{a}{p}\right]=\pi\left[1+(2-\beta+\gamma)\,\frac{a}{p}\right]\left[1+\gamma\,\frac{a}{p}\right]\\&=\pi\left[1+(2-\beta+\gamma)\,\frac{a}{p}\right]\end{aligned} \tag{27.22}$$

となる．これを使うと，1 周期ごとの近日点移動 $\varDelta\phi$ は

$$\boxed{\varDelta\phi=\frac{6\,\pi\,a}{p}\,\frac{2-\beta+2\gamma}{3}\qquad\text{近日点移動}} \tag{27.23}$$

となる．太陽にもっとも近い水星では

$$p=55\times10^6\,\mathrm{km}\qquad(\text{水星}) \tag{27.24}$$

である．これと $a=a_\odot\approx1.5\,\mathrm{km}$，$\pi\Leftrightarrow180\times3600''$，さらに一般相対論に対する値 $\beta=\gamma=1$ を使えば

$$\varDelta\phi=\frac{6\,\pi\,a}{p}=0.104''\qquad(\text{水星の 1 周あたり}) \tag{27.25}$$

を得る．100 年間に 415 回太陽を周回するので，これは

$$\Delta\phi = 43.0'' \qquad (\text{水星の 100 年あたり}) \tag{27.26}$$

のように積算される．しかしながら，もっと遠くにある地球に対しては，この近日点移動は 100 年間でたったの 5″ である．

1882 年，すでにニューカム (Newcomb) は 100 年当たりの水星の近日点移動が（他の惑星の擾乱がなければ）43″ であることを見いだしていた．慣性系でほぼ 575″ という値がまず観測で出てくる．この値から他の惑星の擾乱が引き起こす寄与分が引き去られなければならない．この寄与分（計算されている！）は 532″ となる．このようにしてニューカムの値 43″ を得るのであるが，これが一般相対論の結果と比べるべきものである．観測値を利用すると

$$\frac{2-\beta+2\gamma}{3} = 1.000 \pm 0.001 \tag{27.27}$$

となり [文献 9]，別の観測から知られた $\gamma$ の値を使うと

$$\beta = 1.000 \pm 0.003 \qquad (\text{近日点移動}) \tag{27.28}$$

となる．これは一般相対論の $\beta = 1$ の値と一致している．$\beta$ はロバートソン展開における非線形な項の係数であるから，このことでアインシュタインの場の方程式の**非線形性**がテストされたことになる．

ニュートン理論では近日点移動はなく，$\Delta\phi_N = 0$ である．しかし，これは (27.23) に $\gamma = \beta = 0$ を代入することによって得られるのではない．その理由は，(27.23) が重力場の相対論効果を含んでいるだけでなく，運動方程式が相対論効果を含んでいることによる．

### 太陽の 4 重極モーメント

近日点移動に対して，さらに太陽の質量による 4 重極モーメントの影響を議論する．4 重極モーメント

$$\mathcal{Q} = J_2\, M_\odot\, R_\odot^2 \tag{27.29}$$

は，無次元の量 $J_2 \ll 1$ で代表させられる．均質な回転楕円体に対しては，$J_2 = (2/5)(R_{\rm eq} - R_{\rm pol})/R_\odot$ となる．ここで，$R_{\rm pol}$ は回転軸に平行な半径，そして $R_{\rm eq}$ は赤道面内の半径，$R_\odot$ は楕円体の体積を $V = 4\pi R_\odot^3/3$ と置くことによって決められる．

ニュートンの重力ポテンシャルに対するこの 4 重極モーメントの効果は，(静電気学での 4 重極ポテンシャルとの類似で) 簡単に計算できる．赤道面で重力ポテンシャルは

$$\Phi(r) = -\frac{G\,M}{r} - \frac{G\,Q}{4\,r^3} \tag{27.30}$$

となる．加わった項は相対論的ポテンシャル(25.27)

$$V_{\rm eff} - \frac{\ell^2}{2\,r^2} = -\frac{G\,M}{r} - \frac{G\,M\,\ell^2}{c^2\,r^3} \tag{27.31}$$

と同じ形をしている．$r \sim p$，そして $\ell \sim p\,v$，$v^2 \sim G\,M/p$ として，両付加項の相対的な大きさを評価してみると

$$\frac{G\,Q}{G\,M\,\ell^2/c^2} \sim \frac{J_2\,R_\odot^2}{p^2 v^2/c^2} \sim \frac{J_2\,R_\odot^2}{p\,G\,M/c^2} = \frac{J_2\,R_\odot^2}{a\,p} \tag{27.32}$$

となる．この評価は，二つの効果を合わせた近日点移動の表式

$$\Delta\phi = \frac{6\,\pi\,a}{p}\left(\frac{2-\beta+2\,\gamma}{3} + \frac{J_2\,R_\odot^2}{2\,a\,p}\right) \tag{27.33}$$

を係数の数値にいたるまでよく説明する．太陽は回転している液滴と見なすことができ，その液滴は重力で形を保っている．液滴が形を保ちながら回転しているときは，遠心力と重力が流体力学的に釣り合っている．回転がなければ平衡状態は球であり，その他の場合は回転数に依存した変形が生じる．太陽のひずみの程度を評価してみると，$J_2 \sim 10^{-7}$ となる．また，太陽脈動の観測から角速度の半径依存性を知ることができる．これらの観測結果[6)]を解析して

$$J_2 \approx (2.18 \pm 0.06) \times 10^{-7} \tag{27.34}$$

---

6) F. P. Pijpers, *Helioseismic determination of the solar gravitational quadrupole moment*, arXiv: astro-ph/9804258.

を得る．よって，(27.33)の修正項は $J_2 R_\odot^2/(2ap) \approx 5\times10^{-4}$ であり，かくして(27.27)に与えられている標準偏差の半分に等しい．この項は(27.27)を導く評価の際にすでに考慮されている．

# 28　レーダーの反射波の遅れ

地球から発信されたレーダー信号は他の惑星で反射され，そして再び地上で受信できる．その際，レーダー波が太陽の重力場を通過すると，その反射波は時間的に遅れて地上に到着する．その所要時間の変化は実験的に観測される．

図 28.1 に実験の幾何学的な略図が示されている．レーダー波の通過時間を地球と惑星間で計算したい．そのために，$\varepsilon = 0$ と置いた動径方程式(25.16)

$$A\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} = 0 \tag{28.1}$$

から出発する．次式

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{1}{c}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{dx^0}{d\lambda} \overset{(25.13)}{=} \frac{1}{c}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{F}{B} \tag{28.2}$$

を使うと

$$\frac{A\,F^2}{c^2\,B^2\,\ell^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{F^2}{B\,\ell^2} = 0 \tag{28.3}$$

を得る．太陽中心からの最短距離 $r_\mathrm{o}$ では $dr/dt = 0$ である．それゆえ

$$\frac{F^2}{\ell^2} = \frac{B(r_\mathrm{o})}{r_\mathrm{o}^2} \tag{28.4}$$

が成り立つ．これを(28.3)に代入すると

$$\frac{A}{c^2\,B}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r_\mathrm{o}^2}{r^2}\,\frac{B}{B(r_\mathrm{o})} - 1 = 0 \tag{28.5}$$

となる．この微分方程式は積分

$$t(r, r_\mathrm{o}) = \frac{1}{c}\int_{r_\mathrm{o}}^{r} dr'\sqrt{\frac{A(r')}{B(r')}}\left[1 - \frac{r_\mathrm{o}^2}{r'^2}\,\frac{B(r')}{B(r_\mathrm{o})}\right]^{-1/2} \tag{28.6}$$

で解ける．ここで $t(r, r_\mathrm{o})$ は，レーダー波が $r_\mathrm{o}$ から $r$ まで通過するために必要とする時間である．座標時 $t$ は遠く離れた地点（形式的には $r = \infty$）に静

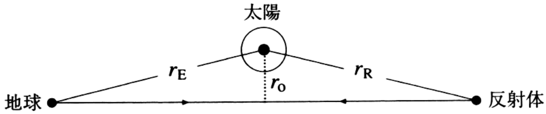



**図 28.1**: レーダー信号が地球から発信され，反射体（たとえば金星）から反射される．太陽がレーダー信号の通り道を横切ると測定可能な遅れが生じる．この模式的な略図には，レーダー波の軌道の曲がりは示されていない．

止している時計で示される．地球時間との関係は容易に定められる（演習問題 12.1）．

観測される遅れ $\delta t$ に対して，$t$ と地球時間の差は無視できる．

ロバートソン展開

$$A = 1 + \gamma\,\frac{2\,a}{r} + \cdots\,, \qquad B = 1 - \frac{2\,a}{r} + \cdots \tag{28.7}$$

を使って

$$\begin{aligned} 1 - \frac{r_o^2}{r^2}\,\frac{B(r)}{B(r_o)} &= 1 - \frac{r_o^2}{r^2}\left[1 + 2\,a\left(\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r}\right)\right] \\ &= \left[1 - \frac{r_o^2}{r^2}\right]\left(1 - \frac{2\,a\,r_o}{r(r+r_o)}\right) \end{aligned} \tag{28.8}$$

を得る．(28.7) と (28.8) を (28.6) に代入すると

$$\begin{aligned} t(r, r_o) &= \frac{1}{c}\int_{r_o}^{r} dr' \left[1 - \frac{r_o^2}{r'^2}\right]^{-1/2}\left(1 + \frac{a\,r_o}{r'(r'+r_o)} + (1+\gamma)\,\frac{a}{r'}\right) \\ &= \frac{\sqrt{r^2 - r_o^2}}{c} + \frac{a}{c}\sqrt{\frac{r - r_o}{r + r_o}} + (1+\gamma)\,\frac{a}{c}\,\ln\left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_o^2}}{r_o}\right) \end{aligned} \tag{28.9}$$

となる．最初の項 $\sqrt{r^2 - r_o^2}\,/c$ は，ユークリッド空間で直線軌道を描く光の走行時間を与える．したがって，他の項は太陽の重力場によって生じる遅れ $\delta t$ を表す．図 28.1 に描かれた実験に対しては，この遅れは

$$\delta t = 2\left(t(r_E, r_o) + t(r_R, r_o) - \sqrt{r_E^2 - r_o^2}/c - \sqrt{r_R^2 - r_o^2}\,/c\right) \tag{28.10}$$

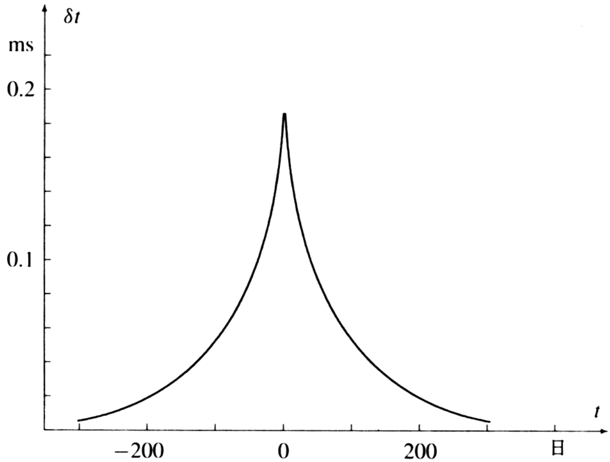



**図 28.2**: 金星からのレーダー反射波の遅れ $\delta t$．横軸は日数で表した観測時間 $t$．ここで $t=0$ は地球-太陽-金星が会合した時刻，すなわち，レーダー波が太陽をかすめるようになる時刻である．

に等しい．係数 2 はレーダー波が軌道を往復することを示す．レーダー波が太陽の側を通過するときに，すなわち $r_0$ が 2~3 太陽半径の大きさのときに，著しい走行時間の遅れが生じる．$r_E \gg R_\odot$ と $r_R \gg R_\odot$ から，$r_E \gg r_o$ と $r_R \gg r_o$ が出る．よって主な寄与は

$$\boxed{\delta t = \frac{4\,a}{c}\left[1+\frac{1+\gamma}{2}\ln\left(\frac{4\,r_E\,r_R}{r_o^2}\right)\right] \qquad \text{レーダー反射波の遅れ}} \qquad (28.11)$$

となる．距離 $r_E$ と $r_R$ には（軌道が楕円であるため）弱い時間依存性がある．一方，レーダー波が太陽の近くを通過するようになると，$r_o(t)$ の時間（日時）依存性が強く効くようになる．既知の値，$r_E$，$r_R$ と $r_o(t)$ を (28.11) に代入すると，時間の関数として $\delta t$ を得る．この結果は図 28.2 に示してある．

遅延時間 $\delta t$ は，レーダー波がまさに太陽をかすめるときに最大になる．こうして $r_{o,\min} = R_\odot$ に対して

$$\delta t_{\max} = \frac{4\,a}{c}\left[1+\frac{1+\gamma}{2}\ln\left(\frac{4\,r_E\,r_R}{R_\odot^2}\right)\right] \approx 2\times 10^{-4}\,\mathrm{s} \qquad (28.12)$$

を得る．ここで次の数値，$r_E \sim r_R \sim 10^8\,\mathrm{km}$ と $R_\odot \approx 7\times 10^5\,\mathrm{km}$，$\ln(10^5) \approx$

10，$2\,a/c = 10^{-5}\,\mathrm{s}$ が使われた．

遅延時間 $\delta t$ は，実際の経過時間を計測し，重力場なしで計算された経過時間から差し引いてもそれでは決められない．というのは，われわれは距離 $r_{\mathrm{E}}$ と $r_{\mathrm{R}}$ をこの実験に必要なほど十分正確には知っていない．しかしながらレーダー波が地球と反射体の動きに依存しながら太陽のそばを走るとき，往復の時間がどのように時間（日時）とともに変動するかは観測可能である．この実験は 1964 年，シャピロ (Shapiro) によって提案され，数年後に実行された．理論的な予測 (28.11) と観測データとを比較して，次の数値が得られた [文献 9]．

$$\gamma = 1.000 \pm 0.002 \tag{28.13}$$

これは一般相対論との良い一致を示している．

# 29 測地線歳差

重力はコマの歳差を引き起こす．われわれは，地球の重力場における以下の効果を調べることにする．

1. 測地線歳差：これは重力場で自由落下するコマの歳差である．この効果を地球の等方的な重力場に対して計算する．
2. ティリング(Thirring)－レンゼ(Lense)効果：重力場中のコマの歳差であるが，これは地球の回転によって起こる．この小さな効果を次の節で計算する．

コマあるいはジャイロスコープ（回転儀）[7]は剛体であって，それは重心の運動に加えて回転運動も行うことができる．これら以外の自由度は今は考えないことにする．回転運動は角運動量をもっており，それにリーマン・ベクトル $s^\mu$ を割り当てる．重力以外の力が働かないときは局所慣性系で $d\,s^\alpha/d\,\tau=0$ が成り立つ．共変原理によって，これは $D\,s^\mu/d\,\tau=0$，あるいは

$$\frac{d\,s^\mu}{d\,\tau}=-\Gamma^{\mu}_{\kappa\,\nu}\,s^\kappa\,u^\nu \tag{29.1}$$

となる．スピン，または角運動量に対するこの運動方程式は20節で与えられている．これを使って，人工衛星に乗せてあるコマの測地線歳差を計算するのであるが，自分自身回転している人工衛星は全体としてコマの役もする．人工衛星が瞬間的に止まっている系では，スピン・ベクトルに対して $(s'^\alpha)=(0,s'^i)$ が成り立つ．ここで $\boldsymbol{s}'$ はコマの角運動量である．

(29.1)に対しては，重力 $\Gamma^{\mu}_{\kappa\nu}$ と衛星の速度 $u^\nu$ をくわしく知る必要がある．われわれは，座標 $(x^\mu)=(c\,t,\,r,\,\theta,\,\phi)$ と計量の係数

$$\left(g_{\mu\nu}\right)=\mathrm{diag}\,\left(\,B(r),\,-A(r),\,-r^2,\,-r^2\,\sin^2\theta\,\right) \tag{29.2}$$

をもっている標準形の計量を使う．後ほど $A(r)$ と $B(r)$ とに対して，シュワルツシルト解かまたはロバートソン展開を代入する．衛星は円軌道

$$r=\mathrm{const.},\qquad \theta=\frac{\pi}{2}\qquad \phi=\omega_0\,\tau \tag{29.3}$$

[7] ジャイロスコープは一種のコマであるが，歳差計測にも使える高級なコマである．

を速度

$$(u^\mu) = (d\,x^\mu/d\,\tau) = (u^0,\,0,\,0,\,u^3), \quad u^0 = \text{const.} \quad u^3 = \omega_0 = \text{const.} \tag{29.4}$$

で動く．クリストッフェル記号(23.10)に $\theta = \pi/2$ を代入する．その結果，次のクリストッフェル記号のみが値をもつことがわかる．

$$\Gamma^1_{00} = \frac{B'}{2\,A}, \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{A'}{2\,A}, \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{A}, \qquad \Gamma^1_{33} = -\frac{r}{A}$$

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{B'}{2\,B}, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \tag{29.5}$$

(29.1)を各成分ごとに書き下すことにし，$u^1 = u^2 = 0$, $\Gamma^0_{00} = 0$, $\Gamma^0_{11} = 0$ などを考慮すると次を得る．

$$\frac{d\,s^0}{d\,\tau} = -\Gamma^0_{01}\,u^0\,s^1 \tag{29.6}$$

$$\frac{d\,s^1}{d\,\tau} = -\Gamma^1_{00}\,u^0\,s^0 - \Gamma^1_{33}\,u^3\,s^3 \tag{29.7}$$

$$\frac{d\,s^2}{d\,\tau} = 0 \tag{29.8}$$

$$\frac{d\,s^3}{d\,\tau} = -\Gamma^3_{31}\,u^3\,s^1 \tag{29.9}$$

これは $s^\mu(\tau)$ に対して線形の微分方程式である．$r = \text{const.}$, かつ $u^\mu = \text{const.}$ であるので，係数はすべて定数である．3 番目の方程式から

$$s^2(\tau) = \text{const.} \tag{29.10}$$

が出る．よって，軌道面に垂直なスピンあるいは角運動量の成分は定数である．(29.7)を $\tau$ に関して微分し，その右辺に(29.6)と(29.9)を代入する．

$$\frac{d^2 s^1}{d\,\tau^2} = \left[\,\Gamma^1_{00}\,\Gamma^0_{01}\,\left(u^0\right)^2 + \Gamma^1_{33}\,\Gamma^3_{31}\,\left(u^3\right)^2\,\right]\,s^1 = -\omega^2\,s^1 \tag{29.11}$$

このように定義された $\omega^2$ で係数 $(u^3)^2 = \omega_0^2$ をくくり出し，そして(29.5)を使うと

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[ -\frac{B'^2}{4AB} \left( \frac{u^0}{u^3} \right)^2 + \frac{1}{A} \right] \tag{29.12}$$

を得る．ところで，(29.4)の速度 $u^\mu$ について重力場中の軌道方程式は解ける．特に方程式 $d\,u^1/d\,\tau = -\Gamma^1_{\kappa\mu}\,u^\kappa\,u^\mu$ は

$$\frac{d\,u^1}{d\,\tau} = -\Gamma^1_{00}\,\left(u^0\right)^2 - \Gamma^1_{33}\,\left(u^3\right)^2 = -\frac{1}{2\,A}\left(B'(r)\,\left(u^0\right)^2 - 2\,r\left(u^3\right)^2\right) = 0 \tag{29.13}$$

となり

$$\left(\frac{u^0}{u^3}\right)^2 = \frac{2\,r}{B'} \tag{29.14}$$

を得る．これを(29.12)に代入すると

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{A}\left(1 - \frac{r\,B'}{2\,B}\right)} \tag{29.15}$$

となる．次の式

$$B = 1 - \frac{2\,a}{r}, \qquad A = \frac{1}{1 - 2\,a/r} \qquad \text{(シュワルツシルト計量)}$$
$$B = 1 - \frac{2\,a}{r} + \cdots, \quad A = 1 + \gamma\,\frac{2\,a}{r} + \cdots \quad \text{(ロバートソン展開)} \tag{29.16}$$

を使うと，これは

$$\omega = \omega_0 \cdot \begin{cases} \sqrt{1 - \dfrac{3\,a}{r}} & \text{(シュワルツシルト計量)} \\ \sqrt{1 - (1 + 2\,\gamma)\,\dfrac{a}{r}} & \text{(ロバートソン展開)} \end{cases} \tag{29.17}$$

となる．シュワルツシルト計量を使った結果は厳密である．一方，ロバートソン展開を使った結果は，実験で検証されるべき計量係数が何であるかを示している．

初期条件を $s^1(0) = S$ と $\dot{s}^1(0) = 0$ とすると

$$s^1(\tau) = S\,\cos(\omega\,\tau), \quad s^2 = \text{const.}, \quad s^3(\tau) = -\frac{S\,\omega_0}{r\,\omega}\,\sin(\omega\,\tau) \tag{29.18}$$

になる．最初の式は(29.11)から，そして2番目は(29.10)から，3番目は(29.9)から出る．これらの結果を議論するために，まず衛星の軌道に沿った定ベク

トル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat{x}} = \boldsymbol{e}_{\hat{r}} \cos(\omega_0 \tau) - \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} \sin(\omega_0 \tau)$ を思い描こう．$\boldsymbol{A}$ の成分を球座標で書き下す[8)]（このとき ${A_\phi}^2 = g_{33}\,(A^3)^2$ であることに気をつけよう）と

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat{x}}\,, \qquad A^1 = \cos(\omega_0 \tau), \qquad A^3 = -\frac{1}{r}\sin(\omega_0 \tau) \tag{29.19}$$

となる．$A^1(\tau)$ と $A^3(\tau)$ に時間依存性が現れるのは，球座標を使っているためとベクトルの位置が動くためである．1 周期 $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ の後，係数 $A^i$ は $\tau = 0$ のときと同じになる．しかし $\omega \neq \omega_0$ のために，これはスピン・ベクトル (29.18) には成り立たない．スピン・ベクトルに対しては，1 周期後に位相差

$$\Delta\alpha = (\omega_0 - \omega)\,\tau_0 = 2\pi - 2\pi\sqrt{1 - \frac{(1+2\gamma)\,a}{r}} \approx \pi\,\frac{(1+2\gamma)\,a}{r} \tag{29.20}$$

が現れる．これはスピン・ベクトルが 1 周期後に軌道面で初期の方向からずれる角度である．

$$\boxed{\Delta\alpha = \frac{3\pi a}{r}\,\frac{1+2\gamma}{3} \qquad \text{1 周期あたりの測地線歳差}} \tag{29.21}$$

この結果を $r \approx R_{\mathrm{E}} = 6400\,\mathrm{km}$ の人工衛星に当てはめてみよう．軌道を円として，$\omega_0^2\,R_{\mathrm{E}} = G\,M_{\mathrm{E}}/R_{\mathrm{E}}^2 = g$ から周回時間 $\tau_0 = 2\pi\,(R_{\mathrm{E}}/g)^{1/2}$ が出る．ここで $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$ は重力加速度であり，$R_{\mathrm{E}}$ は地球の半径である．1 年間の観測時間 $t$ 後の角度変化は

$$\Delta\alpha(t) = \Delta\alpha\,\frac{t}{\tau_0} = 3\pi\,\frac{g\,R_{\mathrm{E}}}{c^2}\,\frac{t}{2\pi\sqrt{R_{\mathrm{E}}/g}} = 8'' \tag{29.22}$$

となる．衛星にジャイロスコープを乗せた実験が計画されているが，それについては次の節で検討する．

## 月のドジッター歳差

地球－月系は，共通の重心の周りに一定の軌道角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ をもつ．よってこの系は，太陽の周りを公転するジャイロスコープとみなすことができる．角

8) 訳注：16 節 (16.16) も参照のこと．

運動量は地球軌道に垂直な成分と平行な成分とをもっており，$\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}_\perp + \boldsymbol{\ell}_\parallel$ である．地球を回る月の軌道は，太陽を回る地球の軌道に対して5度程度しか傾いていないので，$\boldsymbol{\ell}_\perp$ が主成分である．それはスピン成分 $s^2$ に対応しており，よってそれは一定である．それに対して $\boldsymbol{\ell}_\parallel$ は小さい成分であるが，それが今考察している測地線歳差を示す．

基本的には，角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ は月の軌道角運動量である．$\boldsymbol{\ell}_\parallel$ が歳差をもつということは，月の軌道面（それは地球の軌道に対してわずかに傾いているがそれを保ったまま）が全体としてゆっくり回転している，あるいは $\boldsymbol{\ell}$ が回転していることを意味している．すなわち，月の軌道が歳差運動をしている．ドジッター(de Sitter)は，1916年には一般相対論に基づくこの結果に気がついていた．

100年あたりの歳差角度，すなわち太陽をめぐる“地球－月”コマの100回転後の歳差角度を計算すると

$$\Delta\alpha_{\text{Sitter}} = 3\,\pi\,\frac{a_\odot}{r_{\text{ES}}} \times 100 \approx 2'' \qquad (100\text{年当たり}) \tag{29.23}$$

を得る．ここで $a$ として太陽に対する値 $a_\odot$ =1.5 km を，地球－太陽の距離として $r_{\text{ES}} = 8$ 分の光路長に対応する距離を(29.21)に代入し，結果を100倍した．

ニュートン理論で月の軌道の（とりわけ，他の惑星の重力場による）歳差はすでに得られている．このニュートンの歳差は18.6年の周期をもっていて，ドジッター効果より $10^7$ 大きい．それにもかかわらず，ドジッター歳差を検出するには月の軌道を非常に精密に計測しなければならない．この計測は，1969年のアポロ号の月着陸の際に月面に設置された鏡によるレーザー光の反射を使えば可能である．データの解析は地球－月系の運動の計算を基にして行われたが，その際関係するすべての効果が考慮された．解析の結果 [文献9]，0.7%の誤差で月軌道のドジッター歳差（すなわち測地線歳差）の一般相対論的予測が確認された．

# 30 ティリングーレンゼ効果

ティリング(Tiling)－レンゼ(Lense)効果は，重力場と地球の回転双方の影響によるコマの歳差である．
シュワルツシルト計量で表される重力場は球形荷電体の外部のクーロン場に対応しており，双方の場は静的で等方である．この荷電体が一定の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回っていればさらに静磁場ができる．質量をもつ物体が回転すれば類似の重力磁場が生じる．

## 回転している地球の計量

まず最初に回転している地球の作る計量場を計算する．この弱い場 ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) に対しては，次のような線形な場の方程式で十分である．

$$\Box\, h_{\mu\nu} = -\frac{16\,\pi\, G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\,\eta_{\mu\nu}\right) \tag{30.1}$$

座標 $(x^\mu) = (c\,t,\, x^i)$ は，オーダー $h$ の修正を除けばミンコフスキー座標である．

エネルギー運動量テンソル(20.29)では圧力 $P\,(\ll \varrho\, c^2)$ を無視してよい．地球の回転と結びついている速度 $v$ は $c$ に比べると小さいので，$(v/c)^2$ のオーダーの項は省略すれば

$$(T_{\mu\nu}) \approx \varrho\, c^2 \begin{pmatrix} 1 & v_i/c \\ v_i/c & 0 \end{pmatrix} \tag{30.2}$$

となる．$v_i$ に比例する項は，電流が磁場を発生させるように重力磁場を発生させる．地球の質量分布は近似的に球形であるので

$$\varrho(\boldsymbol{r}) = \varrho(r) = \begin{cases} \varrho_0 & (r < R_{\rm E}) \\ 0 & (r > R_{\rm E}) \end{cases} \tag{30.3}$$

となる．地球の角速度は次のとおりである．

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\, \boldsymbol{e}_3, \qquad \omega = \frac{2\,\pi}{\rm day} \tag{30.4}$$

地球は剛体回転しており，速度場は

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \qquad \text{または} \qquad v_i = \epsilon_{ikn}\, \omega^k\, x^n \tag{30.5}$$

である．（準）ミンコフスキー座標では，$(x^i) = -(x_i)$ かつ $(v^i) = -(v_i)$ であることに注意してほしい．形式的には，このことは(30.5)の $\epsilon_{ikn}$ の符号から生じている[9]．すなわち，ここでは(17.15)によって $\epsilon_{123} = -1$ である．

よって $T_{\mu\nu}$ と場の方程式(30.1)の源項に時間依存性はなく，したがって定常解がある．その解を求めてみよう．定常な場合は，ダランベール演算子 $\Box$ は $-\Delta$ になり，(30.1)は

$$\Delta\, h_{\mu\mu}(\boldsymbol{r}) = \frac{8\,\pi\, G}{c^2}\, \varrho(r), \qquad \Delta\, h_{0i}(\boldsymbol{r}) = \frac{16\,\pi\, G}{c^3}\, \varrho(r)\, \epsilon_{ikn}\, \omega^k\, x^n \tag{30.6}$$

となる．$\Delta\,(1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) = -4\,\pi\,\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ の助けを借りて，積分

$$h_{\mu\mu} = -\frac{2\,G}{c^2} \int d^3r'\, \frac{\varrho(r')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{30.7}$$

$$h_{0i}(\boldsymbol{r}) = -\frac{4\,G}{c^3}\, \epsilon_{ikn}\, \omega^k \int d^3r'\, \frac{\varrho(r')\, x'^n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{30.8}$$

が微分方程式(30.6)の解を与えることを簡単に確かめることができる．このやり方と次につづく積分の評価は，静電気学（一様に帯電した球）と静磁気学（一様に帯電しかつ回転している球）でよく知られている．領域 $r \ge R_{\mathrm{E}}$ に対してわれわれは，球関数展開か，または $x'_j$ のべき級数展開

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \sum_{l,m} \frac{4\,\pi}{2\,l+1}\, \frac{r'^l}{r^{l+1}}\, Y^*_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}}')\, Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{r} - \frac{x^j\, x'_j}{r^3} + \ldots \qquad (r > r') \tag{30.9}$$

を用いる[10]．デカルト成分（空間成分）に対しては，$(x_i) = (g_{ik}\, x^k) = (-x^i + \mathcal{O}(h))$ が成り立つ．(30.7)と(30.8)の右辺はすでに $h$ のオーダーであるので，補正項 $\mathcal{O}(h)$ は省略してよい．(30.7)では(30.9)の第一項のみが寄与して

$$h_{\mu\mu} = -\frac{2\,G}{c^2\, r} \int d^3r'\, \varrho(\boldsymbol{r}') = -\frac{2\,G\,M}{c^2\, r} \qquad (r \ge R_{\mathrm{E}}) \tag{30.10}$$

---

[9] 訳注：たとえば，$v_1 = \epsilon_{123}\omega^2 x^3 - \epsilon_{123}\omega^3 x^2 = \epsilon_{123} v^1 = -v^1$

[10] 訳注：わが国では $Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})$ は $Y_{lm}(\theta,\ \phi)$ と書くことが多い．

を得る．$\varrho\, x'^n \propto Y^*_{1m}$ であるので，(30.8)では $l=1$ の項のみが寄与し，これは(30.9)の右辺の第２項に対応する[11]．よって

$$h_{0i}(\boldsymbol{r}) = \frac{4\,G}{c^3}\,\frac{\epsilon_{ikn}\,\omega^k x^j}{r^3}\int d^3r'\,\varrho(\boldsymbol{r}')\,x'^n x'_j = -\frac{4\,GMR_{\mathrm{E}}^2}{5\,c^3}\,\frac{\epsilon_{ikn}\,\omega^k x^n}{r^3} \tag{30.11}$$

を得る．この結果は領域 $r \geq R_{\mathrm{E}}$ で成り立つ．球状の質量分布 $\varrho(r')$ に関しては，被積分関数 $x'^n x'_j$ を $-\delta^n_j\, r'^2/3$ で置き換えることができる（$x'_1 = -x'^1$ 等に注意）．

成分をベクトル $\boldsymbol{h} = h_{0i}\,\boldsymbol{e}^i$ にまとめ，微分方程式とその解をもう一度一緒に並べて書くと

$$\Delta\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) = \frac{16\,\pi\,G}{c^3}\,\varrho\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) = -\frac{4\,GMR_{\mathrm{E}}^2}{5\,c^3}\,\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{30.12}$$

となる．静磁気学では，回転している一様に帯電した球（電荷 $q$，半径 $R$）のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が同じような計算で与えられる．

$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{4\,\pi}{c}\,\varrho_{\mathrm{e}}\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{q\,R^2}{5\,c}\,\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{30.13}$$

(30.13)がすでにわかっているときは，これからただちに(30.12)の右側の式が導ける．

(30.10)と(30.11)の結果から回転している地球の計量が決まる．

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\,G\,M}{c^2\,r}\right)c^2\,dt^2 - \left(1 + \frac{2\,G\,M}{c^2\,r}\right)d\boldsymbol{r}^2 + 2\,c\,h_{0i}\,dx^i\,dt \tag{30.14}$$

ここで $d\boldsymbol{r}^2 = -dx^i\,dx_i$ であり，結果は $r \geq R_{\mathrm{E}}$ に対して成り立つ．$\boldsymbol{\omega} = 0$ としたとき，$G\,M/c^2 r$ のオーダーでこの計量はシュワルツシルト計量に帰着**しない**．したがって，(30.1)は標準形とは別の座標系を前もって選んでいることになっている．

## 局所慣性系の回転

式(9.2)で回転している座標系を考えた．式(9.2)の $h_{0i}$ は，(30.11)の対応するものと明らかに同じ構造をしている．$r = R_{\mathrm{E}}$ のとき，この比較から次のことが

[11] 訳注：$x'^n$ と $Y^*_{1m}$ は $\sin\theta$ または $\cos\theta$ に比例する．

言える．すなわち，(30.14)は，ある慣性系に対して角速度 $(r_{\mathrm{S}}/R_{\mathrm{E}})\,\omega \sim 10^{-9}\omega$ で回転している座標系を示している[12]．以下でこのことを定量的に見てみる．

歳差の検出にも使える高精度のコマ，すなわちジャイロスコープを考えよう．自由落下しているジャイロスコープのスピン・ベクトル $s^\mu$ に対して運動方程式

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\kappa\nu}\, s^\kappa\, u^\nu = \begin{cases} (h_{ii}\text{を含む項}) & + \ (h_{0i}\text{を含む項}) \\ \text{測地線歳差} & + \ \text{ティリング－レンゼ歳差} \end{cases} \tag{30.15}$$

が成り立つ．この式のクリストッフェル記号は計量(30.14)から計算されるものである．上の式の右辺は測地線歳差（$h_{ii}$ を含む項，29 節）とティリング－レンゼ歳差（$h_{0i}$ を含む項）の合わさったものである．線形近似（$h$ に関して線形）ではこの二つの項は和として現れ，お互い独立に計算できる．以下では $h_{0i}$ の寄与のみを考える．

$h$ と $v/c$ のゼロ次のオーダーに対して

$$(u^\mu) \approx (u^\alpha) \approx (c, 0), \qquad (s^\mu) \approx (s^\alpha) \approx (0,\, s^i), \qquad d\tau \approx dt \tag{30.16}$$

が成り立つ．ティリング－レンゼ歳差は，このゼロ次のオーダーですでに現れる．ゼロ次のオーダー以上を求めたいのであれば，$v/c$ のオーダーの補正項を求めることもできる．しかしこのような項は通常興味を引かない．というのは，(30.16)を使って計算したティリング－レンゼ歳差はそれだけでもすでに小さな効果である（後ほど結果を測地線歳差と比べてみよ）．

さて，(30.15)に(30.16)に代入すると

$$\frac{ds^i}{dt} = -c\,\Gamma^i_{0\,j}\, s^j \tag{30.17}$$

となる．時間に依存しない量 $h_{\mu\nu}$ に対して，最低次のオーダーで

$$\Gamma^i_{0\,j} = \frac{\eta^{ik}}{2}\left(\frac{\partial\, h_{0k}}{\partial\, x^j} - \frac{\partial\, h_{0j}}{\partial\, x^k}\right) = \frac{1}{2}\,\left(\partial_j\, h_0{}^i - \partial^i\, h_{0j}\right) \tag{30.18}$$

が成り立つ．$(u^\mu) \approx (c,\, 0)$ であるので，欲しくない項，すなわち測地線歳差の項は(30.17)にはまったく現れない．

[12] 訳注：ここの $r_{\mathrm{S}}$ は地球のシュワルツシルト半径で，$r_{\mathrm{S}} \sim 10^{-2}$m.

ここで $(s_x, s_y, s_z) = (s^i) = (-s_i)$, $(h_x, h_y, h_z) = ({h_0}^i) = (-h_{0i})$ のように，通常のデカルト座標成分に移行する．そして(30.17)を成分 $d\,s^1/d\,t = d\,s_x/d\,t$ について次のように具体的に書き表す．

$$\begin{aligned}\frac{ds_x}{dt} &= -\frac{c}{2}\left(\frac{\partial\,{h_0}^1}{\partial\,x^j} - \frac{\partial\,h_{0j}}{\partial\,x_1}\right)s^j \\ &= -\frac{c}{2}\left(\frac{\partial\,h_x}{\partial\,y} - \frac{\partial\,h_y}{\partial\,x}\right)s_y - \frac{c}{2}\left(\frac{\partial\,h_x}{\partial\,z} - \frac{\partial\,h_z}{\partial\,x}\right)s_z \qquad (30.19)\end{aligned}$$

ベクトル場

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}) = -\frac{c}{2}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) \qquad (30.20)$$

を使うと，(30.19)は $d\,s_x/d\,t = \Omega_y\,s_z - \Omega_z\,s_y$ となる．他の成分も同じように書けるからそれらを一緒にすると

$$\boxed{\frac{d\,\boldsymbol{s}}{d\,t} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{s} \qquad \text{ティリング－レンゼ歳差}} \qquad (30.21)$$

となる．これはスピン，またはコマの軸が角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で**歳差運動**をしていることを示している．

(30.13)のベクトル・ポテンシャルは，磁気双極子の作る磁場 $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を与える．まったく同じ計算で，(30.12)の場 $\boldsymbol{h}$ から次の角速度を得る．

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}) = \frac{2GMR_{\mathrm{E}}^2}{5c^2}\,\frac{3(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\omega}r^2}{r^5} \qquad \text{局所慣性系の角速度}} \qquad (30.22)$$

$\boldsymbol{\Omega}$ をもつコマの軸の歳差は，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の地球の**回転**によって引き起こされる．コマがある場所の局所慣性系では $\boldsymbol{s} = \mathrm{const.}$ が成り立つのであるから，コマの軸の歳差は**局所慣性系が回転している**ことと同じ意味になる．(30.14)は，恒星が一定の角度座標をもつようなミンコフスキー計量に漸近的に移っていく．したがって，局所慣性系（または，コマの軸）の回転は恒星天に相対的な回転として観測可能である．以上より回転周波数 $\boldsymbol{\Omega}$ の物理的意味は次のようになる．

- 局所慣性系は恒星天に対して $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する．

このことは，地球の回転が局所慣性系をわずかではあるが引きずっているということを意味する．これに対して，29 節の測地線歳差は衛星の運動によって引き起こされる．衛星と結びついた局所慣性系は恒星天に対して（わずかに）回転しているが，その回転は一方では一様場のなかでの衛星の運動に基づいているものであり（測地線歳差），他方では地球の回転運動に基づいている（非等方場，ティリング－レンゼ効果）．

(30.22) に $r = R_{\mathrm{E}}$ を代入し，数係数を省略するとティリング－レンゼ効果の大まかなオーダーを得る．

$$\Omega \sim \frac{G M_{\mathrm{E}} R_{\mathrm{E}}^2}{c^2} \frac{\omega}{R_{\mathrm{E}}^3} = \frac{g R_{\mathrm{E}}}{c^2} \omega \approx 10^{-9} \omega \tag{30.23}$$

ここで 9 節のニュートンのバケツの実験を思い出そう．マッハ原理に従えば，回っているバケツの水面の湾曲はバケツの側面が十分に厚ければ取り除かれるはずである．今の計算は，この効果を定量的に記述している．しかしながら，（バケツとして地球を使う，たとえば，北極に穴を掘って水で満たして使う）バケツの実験は効果が小さいので，結果の検証には向いていない[13]．

北極と赤道の $\boldsymbol{\Omega}$ をここで取り上げてみよう．

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{2GM}{5\,c^2 R_{\mathrm{E}}} \boldsymbol{\omega} \times \begin{cases} 2 & \text{北極} \\ -1 & \text{赤道} \end{cases} \tag{30.24}$$

回転している質量（地球）は，北極では局所慣性系を引きずっている．赤道では，隣接した質量はお互い逆回転の傾向をもっている．北極にあるフーコー振子が恒星天に対して 1 年間にどれほどの角度 $\Delta\phi = \Omega \times 1\,\mathrm{year}$ だけ回転するか具体的に計算してみよう．

$$\Delta\phi = \Omega \times 1\,\mathrm{year} = \frac{4GM}{5\,c^2 R_{\mathrm{E}}}\, 2\pi \times 365 \approx 0.2'' \quad \text{（年間のティリング－レンゼ歳差）} \tag{30.25}$$

ティリングとレンゼは 1918 年にこの効果を計算した．この検証をするために，衛星でコマを用いる実験が計画され数年かかって準備されている[14]．こ

[13] 訳註：バケツが $\omega$ で回っているとする．ありえないことであるが，もし $\Omega = \omega$ であれば水面の湾曲はなくなる．

[14] この実験はスタンフォード・ジャイロスコープ実験，または重力探査 B としてよく知られている．NASA はこの実験装置を 2004 年 4 月 20 日，一周軌道に乗せた．最新の情報については重力探査 B のホームページ http://einstein.stanford.edu/を参照のこと．

のようなコマは測地線歳差，**ならびに**ティリング－レンゼ歳差をこうむる．実験では角運動量 $\boldsymbol{s}$ を衛星の軌道面に垂直に選ぶことで，より大きい（ほぼ40倍の）測地線歳差を取り除くことができる．しかしながら赤道軌道上では $\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\Omega}$ であって，ティリング－レンゼ効果は消えてしまうだろう． だからわれわれは極を通る軌道を選ぶ．こうすると，(30.24)によって地球の回転の効果は完全ではないが取り入れられる．計算すると1年当たりの平均値として $0.04''$ が得られる．

地球の回転が引き起こす場 $h_{0i}$ は，衛星の軌道に（わずかな）影響を及ぼす．衛星ラジオス(LAGEOS)，およびラジオスII(LAGEOS II)の最近の軌道解析では，20%程度の誤差で理論的に期待される効果が見いだされた[文献9].

## 重力磁気力

$\boldsymbol{h} = h_{0i}\,\boldsymbol{e}^i$ とベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の間に形式的な類似性があり，そして局所慣性系の回転数 $\boldsymbol{\Omega}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ との間にも同じ類似性があることがこれまでに示された．この類似性はまた，運動している粒子に働く力にも成り立つ．これを見るため，計量(30.14)を使った1粒子運動方程式

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\kappa\,\nu}\,u^\kappa\,u^\nu \tag{30.26}$$

を考える．われわれはオーダー $\mathcal{O}(v/c)$ の項を取り上げ，オーダー $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ の項は再び無視する．次の近似

$$d\tau \approx dt, \qquad \left(u^\nu\right) \approx \left(c, v^i\right) \tag{30.27}$$

を使うと(30.26)は

$$\frac{dv^i}{dt} = -\Gamma^i_{00}\,c^2 - 2\,c\,\Gamma^i_{0j}\,v^j + \mathcal{O}(v^2/c^2) \tag{30.28}$$

となる．右辺の第1項は，ニュートンの重力ポテンシャル $\Phi$ による $-\Phi_{|i}$ を与える．これは11節で取り扱われたニュートン極限に対応している．さて，(30.17)-(30.19)で $c\,\Gamma^i_{0j}\,s^j = (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{s})^i$ が示された．この導出には $s^j$ のいか

なる特性も使われていないので，$c\,\Gamma^i_{0j}\,v^j = (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v})^i$ も成り立つ．これによって(30.28)は

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad}\,\Phi(\boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}) \qquad \text{重力磁気力を入れた運動方程式}} \tag{30.29}$$

となる．右辺はローレンツ力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}} = q\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}/c)$ と比べるべきものである．式(30.29)を見ると，右辺第2項の $\boldsymbol{\Omega}$ を**重力磁場**と呼ぶ理由がはっきりする．磁気力と重力磁気力の形はコリオリ力の形にそっくりである．というのは，コリオリ力は回転基準系において現れる力で，回転振動数に比例する．北極でフーコー振り子の面の回転が回転数 $\boldsymbol{\Omega}$ であるとすると，それは振り子の質量にかかる“コリオリ力” $2\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r})$ によって引き起こされるのである．

さて，一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している質量の重力場を計算しよう．これは電気力学において，運動している電荷の電磁場に対応する．まず，粒子の静止系 KS′（座標 $x'^{\mu}$）へ移る．エネルギー運動量テンソルは(30.2)で $v_i = 0$ とした形である．線形化した場の方程式は，この節の始めのように解くことができて

$$h'_{\mu\mu} = -\frac{2GM}{c^2 r}, \qquad h'_{\mu\nu} \overset{\mu\neq\nu}{=} 0 \qquad (|h'_{\mu\nu}| \ll 1) \tag{30.30}$$

となる．$h'_{\mu\nu}$ はリーマン・テンソルであるから，他の座標系 KS (座標 $x^{\mu}$) でも成り立つ．すなわち

$$h_{\mu\nu} = \alpha^{\kappa}_{\mu}\alpha^{\lambda}_{\nu}h'_{\kappa\lambda} \tag{30.31}$$

ここで $\alpha = (\alpha^{\mu}_{\nu})$ は，KS から KS′ への変換マトリクスである．粒子が $\boldsymbol{v}$ で運動している系 KS への変換は $h$ のオーダーまではローレンツ変換である．よって使われる座標は，オーダー $h$ の項までミンコフスキー座標である．このローレンツ変換は

$$\left(\Lambda^{\mu}_{\nu}\right) = \Lambda(-\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 1 & v^i/c \\ v^i/c & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(v^2/c^2\right) \tag{30.32}$$

である．$\alpha^{\kappa}_{\mu} = \Lambda^{\kappa}_{\mu} + \mathcal{O}(h)$ を使うと，われわれは(30.31)から

$$h_{\kappa\lambda} = \Lambda^{\mu}_{\kappa}\,\Lambda^{\nu}_{\lambda}\,h'_{\mu\nu} \Longrightarrow \begin{cases} h_{\kappa\kappa} = h'_{\kappa\kappa} + \mathcal{O}\left(v^2/c^2\right) \\ h_{0i} = 2\,(v_i/c)\,h'_{00} + \mathcal{O}\left(v^2/c^2\right) \end{cases} \tag{30.33}$$

を得る．$\mathcal{O}\left(v^2/c^2\right)$ の項を無視すると，これから

$$\boldsymbol{h} = -\frac{\boldsymbol{v}}{c}\,\frac{4\,G\,M}{c^2\,r} \qquad \text{(運動している質量の重力磁場)} \tag{30.34}$$

が出る．粒子の速度が一定でないときは遅延効果が生じ，電気力学の場合と同じように波の放射につながる．振動している物質からのこのような放射は第 7 章で計算される．

（太陽－惑星系のような）2 体問題でも (30.34) のような重力磁場が現れる．物体 1 から引き起こされる場 $\boldsymbol{h}$ は，ニュートンの重力ポテンシャルと比べると $\mathcal{O}(v_1/c)$ の大きさであり，それが物体 2 に働くときはさらに $\mathcal{O}(v_2/c)$ が掛かる．よって重力磁気力の大きさの程度は

$$K_{\text{重力磁気力}} \sim \frac{v_1\,v_2}{c^2}\,K_{\text{ニュートン}} \tag{30.35}$$

である．天体力学では，相対論的運動方程式と計量とは決められた精度で矛盾なく取り扱われる．ある定められたオーダーまでの，このような系統的な展開は**ポスト・ニュートン近似**と呼ばれる．重力磁気力が最低次のポスト・ニュートン近似で考察できるかどうか，いくつかの場合（2 体系，太陽－惑星，あるいは地球－人工衛星）を議論する．

$m_1 \approx m_2$ である 2 体系では，$v_1 \sim v_2$ と $v_1\,v_2/c^2 = \mathcal{O}(a/r)$ とが成り立つ[15]．よって重力磁気力は $a^2/r^2$ のオーダーであり[16]，近日点移動（ここでは近点移動と呼ぶ）の計算の際に検討されなければならない．PSR 1913+16 系の観測データ[17]は近点移動に対する 1 つの実験値を与える．重力磁気力を考慮すると計算値は実験値と一致する．この意味で重力磁気力は間接的に証明される．

太陽－惑星系や地球－人工衛星系では $m_1 \gg m_2$ が成り立つ．重心はその重心基準系で静止しており，重い相手の速度は小さくて $v_1 = \mathcal{O}(v_2\,m_2/m_1)$ である．これから，$v_1\,v_2/c^2 \sim (a/r)\,m_2/m_1 \ll a/r$ が出る．ニュートン近似

---

[15] 訳注：$m_1 v_1^2/r \sim G m_1 m_2/r^2 = (m_1 c^2/r^2)(m_2 G/c^2) = m_1 c^2 a/r^2$

[16] 訳注：$K_{\text{ニュートン}} \sim (mc^2/r)(a/r)$ であり，(30.35) を考慮すると $K_{\text{重力磁気力}} \sim (mc^2/r)(a/r)^2$ である．

[17] J.H.Taylor and J.M.Weisberg, Astrophysical J. 345 (1989) 434.

を超える最初の補正に比べて，重力磁気力は $m_2/m_1 \ll 1$ だけ小さい．よって重力磁気力は，水星の近日点の計算（27 節）の際に考慮しないでよい．

地球－人工衛星，あるいは地球－月でも $m_1 \gg m_2$ であるから重力磁場は無視してよく，このとき重心系（地球－月）で $v_1 \approx 0$ となる．しかしながら，太陽を回る地球の軌道運動のために慣性系は近似的なものである．もっと厳密に取り扱うには，太陽が静止しているような慣性系を出発点としなければならない．このときは，$v_1$ はもはや無視できるほど小さくはなく，運動している地球の重力磁場は人工衛星の運動に顕著な効果を与える．しかしながら地球を近似的に慣性系と見なしたと同じくらいに，この重力磁場は他の項で埋め合わされてしまう．

## 演習

30.1:　太陽の固有回転は，ニュートンの重力ポテンシャル $\Phi$ の他に重力磁場 $\boldsymbol{\Omega}$ をもたらす．これから最低次の近似で惑星に対して運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r})$$

が出る．力の比 $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}|/|\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi}|$ を水星について評価せよ．

水星：軌道半径 $r \approx 55 \times 10^6$ km，公転周波数 $\omega = 2\pi/(88\,日)$．
太陽：半径 $R_\odot \approx 0.7 \times 10^6$ km，回転周波数 $\omega_\odot = 2\pi/(25\,日)$．

# 31 一般相対性理論の検証

VI 章で一般相対論の点検に利用できるさまざまな予測を示した。これらを利用して，一般相対論に対する重要な実験的検証のまとめをすることにする．

次の事項と効果は実験的な点検に適している．

1. 等価原理
2. 重力赤方偏移
3. 光の湾曲
4. 近日点移動
5. レーダーの反射波の遅れ
6. コマの歳差
7. 重力波

2–4 の事項は一般相対論の三つの古典的な検証とされている．理論と実験の包括的な比較については，総合報告 [文献 8] あるいはウィル(Will)の総合報告 [文献 9] を参照すること．この総合報告 [文献 9] にはこの節で取り上げる実験値がほとんど載っている．これらに加えてダムーア(Damour)[18]の簡潔な報告を挙げておこう．

### 等価原理

等価原理 (10 節) は一般相対論の論理的な前提条件であって，一般相対論からの予測ではない．等価原理の実験的な検証はさまざまなやり方 [文献 8, 文献 9] で行うことができる．“すべての物体は等速で落ちる” という記述は，比 $m_{\mathrm{i}}/m_{\mathrm{g}}$ (慣性質量 対 重力質量) は物質に依らないということを意味している．さまざまな物質に対する $m_{\mathrm{i}}/m_{\mathrm{g}}$ の同等性は，$4 \times 10^{-13}$ までの精度で証明されている．

---

[18] T.Damour, *Gravitation and Experiment*, E-Print gr-qc/9711061 in Archiv www.arxiv.org, and *Experimental Tests of Relativistic Gravity*, gr-qc/9904057.

## ノルトヴェット効果

慣性質量と重力質量の同等性は次のことを示唆する．すなわち，何らかのエネルギー（たとえば電磁エネルギー，あるいは強い相互作用のエネルギー）の寄与分が $\Delta E$ であるとすると，それらは $\Delta E/c^2$ の寄与を $m_{\rm i}$ と $m_{\rm g}$ とに与える．一般相対論によると，このことは重力相互作用の寄与それ自身に対しても成り立つ．ノルトヴェト(Nordtvedt)は，別の重力理論（たとえば，ブランスとディッケの理論）ではそうならないということを見いだした．

重力エネルギーが同じ程度に $m_{\rm i}$ と $m_{\rm g}$ とに寄与するかどうかという問題を検証するために，われわれは大きな物体（たとえば，地球と月）を考えよう．これらに対しては，重力エネルギー $\Delta E_{\rm grav}$ の寄与は十分な大きさである．重力エネルギーの質量への寄与は，地球は月よりも 25 倍大きくなる．今，$\Delta E_{\rm grav}$ が $m_{\rm i}$ と $m_{\rm g}$ とに対して異なった寄与するときは，太陽の場のなかで地球と月は“異なった速さで落ちる”であろう．この効果は月の軌道に 1 メートルのずれを引き起こす．月の軌道は約 3cm の精度で計測することができる．したがって，その効果を見るにはレーザー光を（1969 年アポロ計画で）月に設置された鏡で反射させて計測すればよい．

月の軌道を厳密に解析すると（太陽の場のなかでの）地球と月の加速度は $5\times10^{-13}$ の精度で一致することがわかった．

## 重力赤方偏移

静的な重力場で A 点から B 点に向かって走る光に対しては，振動数の変化 $\nu_{\rm A}/\nu_{\rm B}=\sqrt{g_{00}(\boldsymbol{r}_{\rm B})/g_{00}(\boldsymbol{r}_{\rm A})}$ が起こる（12 節）．ところで，等価原理から運動方程式(11.9)とニュートン極限 $g_{00}=1+2\varPhi/c^2$ が出る．後者から，弱い場では

$$\frac{\nu_{\rm A}}{\nu_{\rm B}}=1+\frac{\varPhi(\boldsymbol{r}_{\rm B})-\varPhi(\boldsymbol{r}_{\rm A})}{c^2}\qquad(\varPhi\ll c^2)\qquad(31.1)$$

が成り立つ．この近似の重力赤方偏移は等価原理から出るのであって，一般相対論の場の方程式には依らない．以下の実験は理論的な予測が正しいことを証明している．

$$\frac{\Delta\nu_{\rm exp}}{\Delta\nu_{\rm theor}} = 1 \pm \begin{cases} 0.06 & \text{太陽光線} \\ 0.01 & \text{メスバウアー効果} \\ 2\times 10^{-4} & \text{水素メーザー} \end{cases} \tag{31.2}$$

## ロバートソン展開

テスト3–6に対して，われわれはロバートソン展開(23.5)

$$\begin{aligned} B(r) &= 1 - 2\,\frac{GM}{c^2 r} + 2\,(\beta-\gamma)\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2 + \cdots \\ A(r) &= 1 + 2\,\gamma\,\frac{GM}{c^2 r} + \cdots \end{aligned} \tag{31.3}$$

を使う．この計量係数は，太陽や地球の重力場のような静的かつ球状の重力場を記述している．そして，$\gamma$ と $\beta$ の予測値は一般相対論とニュートン理論とでは異なる．

$$\gamma = \beta = 1 \quad (\text{アインシュタイン}), \qquad \gamma = \beta = 0 \quad (\text{ニュートン}) \tag{31.4}$$

これら以外にも重力理論を構築することができ，ブランス－ディッケ理論（21節）はその例である．その理論では追加のパラメター $\omega$ があり，$\beta = 1$ および $\gamma = (\omega+1)/(\omega+2)$ となる．

項目3－項目6の効果を計測すれば，$\gamma$ と $\beta$ の値が実験的に明らかになる．

## 光の湾曲

太陽の重力場では，光は角度

$$\Delta\phi = \frac{4\,a}{r_o}\,\frac{1+\gamma}{2} \tag{31.5}$$

だけ曲がる．ここで $a = G\,M_\odot/c^2$ であり，$r_o \approx R_\odot$ は太陽中心から光の軌道までの最短距離である．観測値は次のとおりである．

$$\gamma = \begin{cases} 1.0 \pm 0.1 & (\text{光学的}) \\ 0.99984 \pm 0.00028 & (\text{準星, VLBI}) \end{cases} \tag{31.6}$$

### 近日点移動

惑星の楕円軌道の近日点は一周期当たり角度

$$\Delta\phi = \frac{6\pi a}{p}\,\frac{2-\beta+2\gamma}{3} \tag{31.7}$$

だけ移動する．ここで $a = G M_{\odot}/c^2$ であり，$p$ は楕円軌道のパラメターである[19]．

別の実験から得られた $\gamma$ の値を考慮して水星の近日点移動を解析すると

$$\beta = 1.000 \pm 0.003 \tag{31.8}$$

が得られる．

### レーダーの反射波の遅れ

地球－金星間を往復するレーダー波は太陽の直近をかすめて通り過ぎるとき，その重力場のなかで

$$\delta t_{\max} = \frac{4a}{c}\left[1 + \frac{1+\gamma}{2}\,\ln\left(\frac{4\,r_{\rm E}\,r_{\rm R}}{R_{\odot}^2}\right)\right] \tag{31.9}$$

だけ時間が遅れる．ここで $a = G M_{\odot}/c^2$ であり，$r_{\rm E}$ は太陽と地球の距離，そして $r_{\rm R}$ は太陽と反射体の距離である．金星をレーダーの反射体とした計測は

$$\gamma = 1.000 \pm 0.002 \tag{31.10}$$

を与える．

### コマの歳差

スタンフォード・ジャイロスコープ実験[20]（重力探査Ｂミッションとも呼ばれている）のいろいろな結果，そのうちでもティリング－レンゼ歳差と測地

---

[19] 訳注：図 27.1 または(27.21)参照

[20] http://einstein.stanford.edu/

線歳差の測定結果が今年(2004)報告されることになっている．ティリングーレンゼ効果からは回転している地球の重力磁場が計測されるはずである．

地球－月は太陽の重力場においてコマを形成するが，その観測結果の解析によって測地線歳差の理論的な予測が0.7%の誤差で確認された．

### 重力磁気効果

天体（人工衛星，月，惑星，連星系）の軌道のデータ解析はポスト・ニュートン近似で行われる．すなわち，矛盾のない方法ですべての項が$a/r$と$v/c$の定められたオーダーまで取り入れられる．この取扱いは特に重力磁気力（30節）の考察の際に考慮される．地球の重力磁場は人工衛星の軌道に影響を与えるが，その大きさはほぼ20%の誤差でわかっている．

連星系 PSR 1931+16 の軌道データ，特に近点を明確にするためには重力磁気力が考慮されなければならない．観測された軌道運動[21)]で一般相対論の予測が確認された．

### 月の軌道

すでにノルトヴェト効果のところで触れたように，月の軌道は非常に正確に計測されている．その解析では，すべての関連した要因（パラメター$\beta, \gamma, \cdots$，測地線歳差，重力磁気力）が同時に必要な精度で考慮されなければならない．この解析によって，$\gamma-1$と$\beta-1$の上限が$10^{-3}$の大きさの誤差の範囲で求まった．

### 強い場

VI章では太陽系，すなわち弱い重力場（太陽では$\Phi/c^2 \approx 10^{-6}$）における実験を主に取り上げた．しかしながら，PSR 1931+16 のような連星系の観測と解析[22)]によって，この理論はより強い場($\Phi/c^2 \approx 0.2$)の場合にも検証されている．

---

[21)] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, Astrophysical J. 345 (1989) 434.

[22)] J. H. Taylor et al., *Experimental constraints on strong-field relativistic gravity*, Nature 355 (1992) 132.

## 重力波

加速された質量は重力波を放射する（VII章）が，地表に届いた重力波が直接検出されたことはまだない．しかしながら，重力波が放射されているという間接的な証拠はある．それは連星系 PSR 1931+16 の運動の減衰が観測されたということである（36 節）．この観測では一般相対論の予測が誤差 1%で確認された．

## まとめ

すべての観測実験的な結果は，一般相対論の前提と予測が計測精度の範囲で正しいことを示している．われわれはこれによって，アインシュタインの等価原理は少なくとも 99.999 999 999 9%正しい，そしてアインシュタインの場の理論は少なくとも 99.9%正しいと言い切ることができる [19]．

# VII 重力波

## 32 平面重力波

弱い重力場($|h_{\mu\nu}| = |g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| \ll 1$)ではアインシュタインの場の方程式は線形な場の方程式(22.27)

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\eta_{\mu\nu}\right) \qquad (32.1)$$

になる．源なしの空間($T_{\mu\nu} = 0$)では，これから$\Box h_{\mu\nu} = 0$を得る．この方程式のもっとも簡単な解は平面波であり，ここではこの解を導き，それを検討する．次の節では重力波の発生機構とその検出を考える．

### 電磁波

波動解に対しては電気力学との類似が特に顕著である．よって，ここで電磁波を振り返ることから始めよう．物理的な場 $F^{\alpha\beta} = A^{\beta|\alpha} - A^{\alpha|\beta}$ はゲージ変換

$$A^\alpha \longrightarrow A'^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \chi \qquad (32.2)$$

では変更を受けない．このことはポテンシャル $A^\alpha$ に対するゲージ条件

$$A^\alpha{}_{|\alpha} = 0 \qquad (32.3)$$

を選ぶことを可能にする．このように選ぶと，マクスウェル方程式 $F^{\beta\alpha}{}_{|\beta} = (4\pi/c)\, j^\alpha$ は

$$\Box A^\alpha = \frac{4\pi}{c}\, j^\alpha \qquad (32.4)$$

のように結合が解ける．この方程式は(32.1)と同じ形をしており，その特解は遅延ポテンシャルの形で得ることができる．

(32.3)のために，(32.4)の四つの場のうちの三つだけが互いに独立である．特に自由場 ($j^\alpha = 0$) に対しては，(32.3)と(32.4)とを満たす(32.2)の形の**追加の**ゲージ変換が許される．そしてこの場合の $\chi$ は，それ自身が波動方程式の解である．このゲージ自由度によっ，て $A^0 = 0$ とすることができる．これによって波動方程式は

$$\Box A^\alpha = 0, \qquad A^0 = 0, \qquad A^i{}_{|i} = 0 \tag{32.5}$$

となる．これから二つの**独立な場**が得られる．次の表式

$$A^\alpha = e^\alpha \exp(-\mathrm{i}k_\beta\, x^\beta) + \text{c.c.} = e^\alpha \exp\left(\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\right) + \text{c.c.} \tag{32.6}$$

が波動方程式 $\Box A^\alpha = 0$ の解である．ここで，$(k^\beta) = (\omega/c,\, \boldsymbol{k})$ と $(x^\beta) = (ct,\, \boldsymbol{r})$ であり，

$$k^\beta k_\beta = 0 \qquad \text{または} \qquad \omega^2 = c^2\, k^2 \tag{32.7}$$

であり，そして $k = |\boldsymbol{k}|$ である．複素共役(c.c.)量を加えてあるので，平面波(32.6)は実数の量である．(32.3)のゲージ条件からこのベクトルは

$$(e^\alpha) = (0,\, \boldsymbol{e}), \qquad \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{k} = 0 \tag{32.8}$$

という制限を受ける．偏波ベクトル $e^\alpha$ は，波の振幅と場の方向を定める．狭い意味では，偏波ベクトルという言い方は単位ベクトル $\boldsymbol{e}/|\boldsymbol{e}|$ に対して使われる．

$\boldsymbol{k}$ の方向を座標系の $x^3$-軸に選べば，二つの独立な場は次の 1-，2-成分になる．

$$(A^\alpha) = \left(0,\, e^1,\, e^2,\, 0\right) \exp[\mathrm{i}\, k(x^3 - c\, t)] \tag{32.9}$$

これによって波の二つの偏波面が決まり，それらは $e^1 = A$, $e^2 = 0$ と $e^1 = 0$, $e^2 = A$ とで示すことができる．ベクトル $\boldsymbol{A}$（と，それによって決まる電場ベクトル $\boldsymbol{E}$）は波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ と直交し，それに対して二つの独立な（偏波の）方向が存在する．次の線形結合は円偏波の波を与える．

$$(A^\alpha_{\text{circ}}) = A\,(0,\, 1,\, \pm\mathrm{i},\, 0)\, \exp[\mathrm{i}\, k(x^3 - c\, t)] \tag{32.10}$$

この解は，$x^3$-軸の周りに角度 $\phi$ だけ座標系を回転させることによって次のように変換される．

$$A^{\alpha}_{\rm circ} \quad \xrightarrow{\text{回転}} \quad \exp(\mp {\rm i}\phi)\, A^{\alpha}_{\rm circ} \tag{32.11}$$

量子論では，$A^{\alpha}$ は場の量子（光子）の波動関数となる．(32.11)の結果は，光子は運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ の方向にスピン $\pm\hbar$ をもつということを意味している．

## 重力波と粒子

重力波の量子化は，電磁波とは対照的に実際には何ら重要ではない．これに対する理由付けはすでに22節の最後に述べてある．このことは，原子からの重力波放射の見積もりによって具体的に示されるであろう（36節）．しかしながら，物理学の他の分野との整合のために，波と粒子の関連，すなわち波動方程式とエネルギー運動量関係式との関連，さらに偏波とスピンとの関連を簡単に述べる．

電磁場の量子は光子と呼ばれ，重力場の量子は重力子と呼ばれている．それぞれの波動方程式から，光子も重力子も静止質量がないことが次のようにしてわかる．光子に対しては，波動方程式 $\Box A^{\alpha} = 0$ は $k^{\beta}k_{\beta} = 0$ となる．これと $E = \hbar\omega = \hbar c k^0$ と $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ とを使えば $E^2 = c^2 p^2$ を得る．これを一般的なエネルギー運動量関係式(4.12)，$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$，と比べれば

$$m = 0 \qquad (\text{光子，重力子}) \tag{32.12}$$

を得る．対応して波動方程式 $\Box h_{\mu\nu} = 0$ は $k^{\mu}k_{\mu} = 0$ となり，これから重力子は $m = 0$ である．

古典的な波の偏波は場の量子のスピンの考えに対応する．スピンの大きさはその粒子（光子または重力子）の固有の性質であり，ただその向きだけが変わることができる．

質量粒子のスピン・ベクトルは，瞬間的な静止系 IS$'$ での表記 $(s'^{\alpha}) = (0, \boldsymbol{s}')$ で定義される．孤立した粒子に対しては，ハミルトン関数（またはハミルトン演算子）は回転不変である．この回転対称性によって $\boldsymbol{s}'$ =const. が成り立つ．

質量ゼロの粒子に対しては，静止系は存在しない．運動量ベクトル $\boldsymbol{k}$ は方

向を与える．孤立した粒子に対して，$\boldsymbol{k}$-軸に関する回転対称性が成り立つ．それでスピンの射影 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{k}/k$ が保存量になる．

粒子のスピンの射影は波の偏波に対応する．このとき，$\boldsymbol{s}\,||\,\pm\boldsymbol{k}$ は円偏波に対応し，電磁波の場合の(32.10)に対応する．他の偏波に対する場は適切なゲージ変換で消去することができるが，このような場は物理的には意味がない[1]．これから $|\boldsymbol{s}|\neq 0$ である質量ゼロの粒子は，両方のスピン状態 $\boldsymbol{s}\,||\,\pm\boldsymbol{k}$ を取ることができる．古典的な場の理論（電気力学または一般相対論）では，その時々それに応じた二つの独立な場があり，それは最初の場の数（四つの $A^{\alpha}$ または 10 の $h^{\mu\nu}$）に依存しない．スピンとの関係は，回転のもとでの偏波の変換の様子で明らかになる（(32.11)と小節“へリシティ”の後半）．

## 重力波

さて電気力学との類推で平面重力波を調べよう．座標変換

$$x^{\mu}\to x'^{\mu}=x^{\mu}+\epsilon^{\mu}(x) \tag{32.13}$$

は，次のポテンシャルのゲージ変換(22.25)に導く．

$$h_{\mu\nu}\to h'_{\ \mu\nu}=h_{\,\mu\nu}-\frac{\partial\,\epsilon_{\mu}}{\partial\,x^{\nu}}-\frac{\partial\,\epsilon_{\nu}}{\partial\,x^{\mu}}\equiv h_{\mu\nu}-\epsilon_{\mu|\nu}-\epsilon_{\nu|\mu} \tag{32.14}$$

(32.2)と同じように，この変換も物理的な量には影響を及ぼさない．線形方程式は弱い場に対してのみ成り立つので，(32.13)での座標の変動はわずかである．つまり形式的には，これは

$$|h_{\mu\nu}|\ll 1 \qquad \text{かつ} \qquad |\epsilon_{\mu|\nu}|\ll 1 \tag{32.15}$$

である．以下では $h$ と $\epsilon$ の最低次のオーダーのみを考える．よって，共変成分と反変成分の間の移行は $\eta_{\mu\nu}$ によって行われ，共変微分は偏微分で置き換えてよい．

(32.13)で四つの関数 $\epsilon^{\mu}$ を自由に選んでよい．この自由度によって，要請されている四つのゲージ条件

$$2\,h^{\mu}{}_{\nu|\mu}=h^{\mu}{}_{\mu|\nu} \tag{32.16}$$

[1] 訳注：電磁場のベクトル・ポテンシャルがその例である

を満たすことが可能になる．この条件は線形の場の方程式の結合を解き（22節），(32.1)に導く．これは(32.3)と同じ目的を果たすことになる．

対称性 $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ によって，16 成分の $h_{\mu\nu}$ のうちの 10 だけが互いに独立である．四つの条件(32.16)はこれを六つの独立な成分にする．源なしの方程式

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{32.17}$$

に対しては，$\epsilon^\mu$ が波動方程式 $\Box\epsilon^\mu = 0$ を満たす限り，四つの**追加の**変換(32.14)が可能である．これが最終的に独立な成分の数を 2 に減らす．以下で，具体的に 10 の場を二つに減らすことを示す．最初に(32.17)の解を平面波の形で記述する．

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}\,\exp\left(-\mathrm{i}k_\lambda\, x^\lambda\right) + \text{c.c.} \tag{32.18}$$

このとき

$$\eta^{\lambda\kappa}\,k_\lambda\,k_\kappa = k^\lambda\,k_\lambda = 0 \qquad \text{または} \qquad k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 \tag{32.19}$$

でなければならないし，また $k = |\boldsymbol{k}|$ である．波の振幅 $e_{\mu\nu}$ は**偏波テンソル**と呼ばれている．(32.18)をゲージ条件の式(32.16)に代入すると

$$2\,k_\mu\,\eta^{\mu\rho}\,e_{\rho\nu} = k_\nu\,\eta^{\mu\rho}\,e_{\rho\mu} \tag{32.20}$$

を得る．さて $h_{\mu\nu}$ から偏波テンソルは対称である．すなわち

$$e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu} \tag{32.21}$$

簡単化のために再び $x^3$ －方向の波を考える．

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}\,\exp\left[\mathrm{i}k(x^3 - ct)\right] + \text{c.c.} \tag{32.22}$$

すると，波動ベクトルの成分 $k_\mu$ は

$$k_1 = k_2 = 0, \qquad k_0 = -k_3 = k = \frac{\omega}{c} \tag{32.23}$$

となる．よって，条件(32.20)は $\nu = 0, 1, 2, 3$ に対して次のようになる．

$$e_{00} + e_{30} = (e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33})/2 \tag{32.24}$$

$$e_{01} + e_{31} = 0 \tag{32.25}$$

$$e_{02} + e_{32} = 0 \tag{32.26}$$

$$e_{03} + e_{33} = -(e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33})/2 \tag{32.27}$$

$e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ の対称性とこの四つの条件を考慮すると，偏波テンソル $e_{\mu\nu}$ は次の六つの成分で定まる．

$$\text{独立な成分：}\quad e_{00},\, e_{11},\, e_{33},\, e_{12},\, e_{13},\, e_{23} \tag{32.28}$$

この六つの成分は他のすべての成分を決める．

$$e_{01} = -e_{31}, \quad e_{02} = -e_{32}, \quad e_{03} = -\frac{e_{33} + e_{00}}{2}, \quad e_{22} = -e_{11} \tag{32.29}$$

さて波動解に対して**追加**のゲージ変換を考えよう．これは源なしの波動関数の解であるような関数 $\epsilon^{\mu}(x)$ をもつ変換(32.13)である．

$$\epsilon^{\mu}(x) = \delta^{\mu}\, \exp\left(-\mathrm{i}k_{\lambda}\, x^{\lambda}\right) + \mathrm{c.c.} \tag{32.30}$$

われわれは，ゲージ条件(32.16)を(32.14)の ${h'}_{\mu\nu}$ に対して書き出してみる．

$$2\, h^{\mu}{}_{\nu|\mu} - 2\left[\epsilon^{\mu}{}_{|\nu} + \epsilon_{\nu}{}^{|\mu}\right]_{|\mu} = h^{\mu}{}_{\mu|\nu} - \left[\epsilon^{\mu}{}_{|\mu} + \epsilon^{\mu}{}_{|\mu}\right]_{|\nu} \tag{32.31}$$

$\epsilon^{\mu}{}_{|\nu|\mu}$ である追加の項は互いに消し合い，$\epsilon^{\nu}$ が波動方程式の解であるので $\epsilon_{\nu}{}^{|\mu}{}_{|\mu}$ は消える．このようにして，最初のゲージ条件(32.16)を満たしながら，(32.30)のような（四つの任意の振幅 $\delta^{\mu}$ の）$\epsilon^{\mu}$ を使う追加のゲージ変換が可能となる．

(32.30)の $k_{\lambda}$ を，与えられた波動方程式の解 $h_{\mu\nu}$ の波動ベクトルと同じに選ぶ．すると，(32.14)と(32.30)とからわれわれは新しい解 ${h'}_{\mu\nu}$ を得るが，そこではすべての項は指数関数の係数 $\exp(-\mathrm{i}\, k_{\lambda}\, x^{\lambda})$ をもっている．そして，いまや振幅は $e_{\mu\nu} \to {e'}_{\mu\nu}$ のように変換され，新しい振幅は(32.14)から

$${e'}_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \mathrm{i}k_{\mu}\, \delta_{\nu} + \mathrm{i}k_{\nu}\, \delta_{\mu} \tag{32.32}$$

となる．(32.23)を使うと独立な6の振幅に対してこの式は次の式を与える．

$$e'_{11} = e_{11} \tag{32.33}$$

$$e'_{12} = e_{12} \tag{32.34}$$

$$e'_{13} = e_{13} - \mathrm{i}\,k\,\delta_1 \tag{32.35}$$

$$e'_{23} = e_{23} - \mathrm{i}\,k\,\delta_2 \tag{32.36}$$

$$e'_{33} = e_{33} - 2\,\mathrm{i}\,k\,\delta_3 \tag{32.37}$$

$$e'_{00} = e_{00} + 2\,\mathrm{i}\,k\,\delta_0 \tag{32.38}$$

$e'_{\mu\nu}$ を使った新しい解は，座標変換を行っただけであるので，$e_{\mu\nu}$ を使った前の解と物理的には同等である．新しい解で $\delta_\mu$ を適当に選べば，振幅 $e'_{13}$ と $e'_{23}$，$e'_{33}$，$e'_{00}$ をゼロにすることができる．これから，振幅 $e'_{12}$ と $e'_{11}$ とに対応している偏波だけが物理的に意味があることがわかる．平面波の一般的な表現としては，次のようにこの二つの振幅を考慮するだけで十分である．

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\left[\mathrm{i}\,k\,(x^3 - c\,t)\right] + \text{c.c.} \tag{32.39}$$

ここではダッシュは除かれている．この平面波が(32.9)と対応している．

## ヘリシティ

われわれは $x^3$-軸の周り，すなわち波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向の周りの回転に対して波動(32.39)の様子を調べる．われわれは，今はミンコフスキー計量を使っているので，一般ローレンツ変換の枠組みで回転を記述できる．角度 $\varphi$ だけの回転に対する変換マトリックスは

$$(\bar{\Lambda}^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32.40}$$

である．偏波テンソルは

$$e'_{\mu\nu} = \bar{\Lambda}_\mu^\rho \, \bar{\Lambda}_\nu^\sigma \, e_{\rho\sigma} \tag{32.41}$$

に従って変換される．われわれは六つの振幅 $e_{00}$ と $e_{11}$，$e_{33}$，$e_{12}$，$e_{13}$，$e_{23}$ をもつ(32.28)にちょっと戻ってみる．次の六つの振幅は

$$e_{00}, \qquad e_{33}, \qquad f_\pm = e_{13} \pm \mathrm{i}\, e_{23}, \qquad e_\pm = e_{11} \pm \mathrm{i}\, e_{12} \tag{32.42}$$

前の六つの振幅と等価である．(32.41)から，これらの振幅の変換の様子は次のようになる．

$$e'_{00} = e_{00}, \quad e'_{33} = e_{33}, \quad f'_\pm = \exp(\pm \mathrm{i}\, \varphi)\, f_\pm, \quad e'_\pm = \exp(\pm 2\, \mathrm{i}\, \varphi)\, e_\pm \tag{32.43}$$

よって，波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ 周りの回転の際には

$$\Psi' = \exp(\mathrm{i}\, H\, \varphi)\, \Psi \tag{32.44}$$

に従って平面波が変換される．そして，ここに現れる $H$ を **ヘリシティ** $H$ と呼ぶ．

量子論では $h_{\mu\nu}$ は重力子の波動関数である．したがって変換(32.44)より，重量子が，運動量方向の射影成分 $H\hbar$ の運動量を持つことがわかる．(これは $x^3$-軸のまわりの回転対称がある場合のシュレディンガーの波動関数と比べられる．その際，関数は $\exp(\mathrm{i}\, m\, \varphi)$ に比例し，$m\, \hbar$ は $x^3$-軸への軌道角運動量の射影である)．(32.43)に現れている値 $H = 0, \pm 1, \pm 2$ は，重力子がスピン 2 をもっていることを示している．

前述したように，座標値を適切に選ぶことによって $e_{00}$ と $e_{33}$，$e_{13}$，$e_{23}$ の寄与は消去できる．よって，これらの寄与は物理的には意味がない．(32.42)と(32.44)とから，これらはまさにヘリシティ $H = 0$ と $H = \pm 1$ であり，あるいは粒子的に見ると射影された角運動量 0 と $\pm\hbar$ である．これらの射影の大きさは座標変換で任意に変更できるし，特にゼロにもすることができる．これに反して $H = \pm 2$ は波の物理的な偏波，あるいは重力子の物理的な状態を示している．粒子的にはスピン・ベクトルが運動量に対して平行か反平行であるかを意味している．

# 33 重力波中の粒子

電磁波は荷電粒子に力を及ぼす．これと同じく，重力波は質量粒子に力を及ぼす．われわれは重力波のなかにある自由粒子の変位を計算する．

次の形で表される平面波から始めよう．

$$\big(h_{\mu\nu}(x^3,t)\big)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&e_{11}&e_{12}&0\\0&e_{12}&-e_{11}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\exp\big[\mathrm{i}k\,(x^3-c\,t)\big]+\text{c.c.}\qquad(33.1)$$

使われている座標の意味は

$$d\,s^2=\big[\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}(x^3,t)\big]\;d\,x^\mu\,d\,x^\nu\qquad(33.2)$$

の式からわかる．重力波中の粒子の軌道 $x^\sigma(\tau)$ は運動方程式

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2}=-\Gamma^\sigma_{\mu\,\nu}\,\frac{d\,x^\mu}{d\,\tau}\,\frac{d\,x^\nu}{d\,\tau}\qquad(33.3)$$

に従う．クリストッフェル記号 $\Gamma^\sigma_{\mu\,\nu}$ は，(33.1)の $h_{\mu\nu}$ を使って計算される．重力以外の力は粒子には働いていない．重力波のなかにある塵を思い浮かべてもよい．(33.1)-(33.3)の方程式が，ここで取り扱われる問題を定めている．

次の式

$$\Gamma^\sigma_{\mu\,\nu}=\frac{\eta^{\sigma\,\lambda}}{2}\left(\frac{\partial\,h_{\nu\,\lambda}}{\partial\,x^\mu}+\frac{\partial\,h_{\mu\,\lambda}}{\partial\,x^\nu}-\frac{\partial\,h_{\mu\,\nu}}{\partial\,x^\lambda}\right)+\mathcal{O}\left(h^2\right)\qquad(33.4)$$

と(33.1)とから

$$\Gamma^i_{0\,0}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,h_{0\,i}}{\partial\,x^0}+\frac{\partial\,h_{0\,i}}{\partial\,x^0}-\frac{\partial\,h_{0\,0}}{\partial\,x^i}\right)=0\qquad(33.5)$$

が出る．初期条件として $\dot{x}^i(0)=(dx^i/d\tau)_{\tau=0}=0$ を選ぶ．これから

$$\left(\frac{d^2x^i}{d\,\tau^2}\right)_{\tau=0}=-\Gamma^i_{\mu\,\nu}\,\dot{x}^\mu(0)\,\dot{x}^\nu(0)=-\Gamma^i_{0\,0}\,\dot{x}^0(0)\,\dot{x}^0(0)\overset{(33.5)}{=}0\qquad(33.6)$$

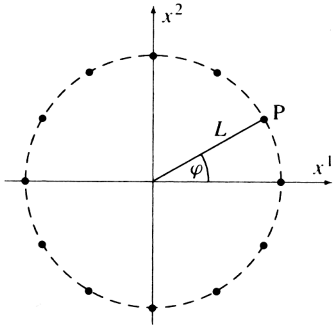



**図 33.1**: 質点が円 $(x^1)^2 + (x^2)^2 = L^2$ の上にある．この配置に対して重力波が $x^3-$ 方向に入射してきたとせよ．このように座標を取ると，波動場中の粒子 P は一定の座標値 $x^1_{\mathrm{P}}$ と $x^2_{\mathrm{P}}$ を取る．しかしながら，中心からの物理的な粒子の距離は振動する（図 33.2）．

が出る．今の座標系では加速度はゼロであるから，次の瞬間，速度もまたゼロである．よって(33.3)の解の一つは

$$\frac{d\,x^i}{d\,\tau} = 0 \text{ より} \quad x^i(\tau) = \text{const.} \tag{33.7}$$

である．よって波動場中の粒子は，使用している座標系において**一定の空間座標値**で記述される．しかしながら，このことはこの粒子が静止していることを意味しない．相対距離は，(33.2)の計量テンソルの時間依存性に基づいて変化するのである．

図 33.1 に示されているように，$x^1 - x^2-$ 面の円周上に並べられている粒子を考えよう．(33.2)を $d\,s^2 = c^2\,dt^2 - dl^2 - (dx^3)^2$ の形に線素

$$d\,l^2 = [\,\delta_{m\,n} - h_{m\,n}]\; d\,x^m\, d\,x^n \qquad (m,\, n = 1,\, 2) \tag{33.8}$$

を使って $x^1 - x^2-$ 面上に記述することにする．ここで $h_{mn}(t) = h_{mn}(x^3 = 0, t)$ であり，よって

$$(\,h_{mn}(t)\,) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & -e_{11} \end{pmatrix} \exp(\,-\mathrm{i}\,\omega\,t) + \text{c.c.} \tag{33.9}$$

となる．(33.8)を使って，例として取り上げる粒子 P の中心からの物理的な距離 $\rho$ を計算する．粒子の座標値 $x^1_{\mathrm{P}}$ と $x^2_{\mathrm{P}}$ とは(33.7)から一定である．(33.8)

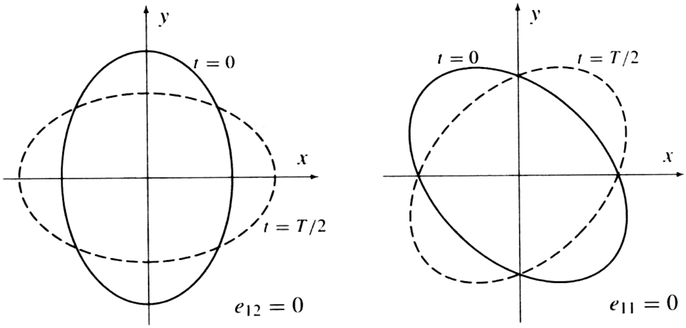



**図 33.2**: （図 33.1 に示した）円周上にある一群の粒子の変位（図 33.1）．粒子は直線偏光した平面重力波の場のなかにある．一定の座標値 $x^1$ と $x^2$ とは対照的に，$x$ と $y$ は中心に対する物理的な位置を示している．実際の変位は非常に小さく，たとえば連星系 i Boo (37.3) の放射の場合 $|\rho - L|/L \sim 10^{-20}$ である．この点で上の図は非常に概念的である．

で $d x^m$ の代わりに直接に P の有限の座標 $x_{\rm P}^m$ を代入してよい．というのは，計量係数 $h_{\mu\nu}$ はそれらの座標 $x^1$ と $x^2$ とに依存しないからである．よって

$$\rho^2 = \left[\,\delta_{mn} - h_{mn}(t)\,\right] x_{\rm P}^m\, x_{\rm P}^n \qquad (m,\, n = 1,\, 2) \tag{33.10}$$

である．粒子 P の位置は角度 $\varphi$（図 33.1）から決まって

$$x_{\rm P}^1 = L\,\cos\varphi\,, \qquad x_{\rm P}^2 = L\,\sin\varphi \tag{33.11}$$

となる．(33.10) を (33.9) と (33.11) を使って整理すると

$$\rho^2 = L^2 \cdot \begin{cases} [1 - 2\,h\,\cos(2\,\varphi)\,\cos(\omega\,t)\,] & (e_{11} = h,\, e_{12} = 0) \\ [1 - 2\,h\,\sin(2\,\varphi)\,\cos(\omega\,t)\,] & (e_{12} = h,\, e_{11} = 0) \end{cases} \tag{33.12}$$

となる．ここでわれわれは二つの直線偏波を用い，さらに波の振幅を $h$ で示した．物理的な変位の概略は図 33.2 に示してある．そこでは，物理的な距離 $\rho$ の射影が $x$ と $y$ で示されている．取り上げた点 P は次の $x - y$ 座標をもつ．

$$x_{\rm P} = \rho\,\cos\varphi\,, \qquad y_{\rm P} = \rho\,\sin\varphi \tag{33.13}$$

一群のテスト粒子の物理的な変位は，非常に小さな離心率をもつ楕円を構成する．波の偏波は，このパターンの角度依存性から読み取れる．二つの独

立な偏波の方向は互い $\pi/4$ の角度を成しているが，電磁波の場合はこの角は $\pi/2$ である．電磁波の場合に似て，変形楕円の軸が時間とともに回転するような円偏波（または楕円偏波）の波が作れる．振幅 $e_{11} = -e_{22} = h$ と $e_{12} = e_{21} = \pm \mathrm{i}\,h$ を同時に使えば円偏波の重力波となる．

図 33.2 に示してあるパターンは，質量分布が四極子モーメントとして振動していることを意味している．このようにして重力波は四極振動を引き起こす．逆に振動している 4 重極モーメントもつ質量分布（たとえば 1d-状態の水素原子や連星系）は重力波を放射する．

**演習**

33.1: 偏波 $e_{11} = h$ と $e_{12} = 0$ をもつ重力波は円周（半径 $L$）上にある自由粒子の位置を $\rho$ の方向にずらす．

$$\rho^2 = L^2\,[1 - 2\,h\,\cos(2\,\varphi)\,\cos(\omega\,t)]$$

$h \ll 1$ のとき曲線 $\rho = \rho(\varphi)$ は楕円を表すことを示せ．楕円の離心率 $\epsilon$ と波の振幅 $h$ との間の関係はどうなっているか．

# 34 重力波のエネルギーと運動量

重力波のエネルギー運動量テンソルを定める．下記の要約では，オーダー 1 の因子は省略してあるが，これからの節を理解するには十分である．

## 要約

場の方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{34.1}$$

である．曲率テンソル $R_{\mu\nu}$ は，計量テンソルの 2 階導関数 $\partial^2 g_{..}/\partial x^{\cdot}\,\partial x^{\cdot}$ と 1 階導関数の 2 重積 $(\partial g_{..}/\partial x^{\cdot})(\partial g_{..}/\partial x^{\cdot})$ から成っている．弱い場の場合，(34.1) の左辺は $h_{\mu\nu}$ のべき乗で展開できる（22 節）．

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} + (h \text{ に関して線形な項})}_{= R^{(1)}_{\mu\nu} - R^{(1)}\eta_{\mu\nu}/2} + \frac{\partial h_{..}}{\partial x^{\cdot}}\frac{\partial h_{..}}{\partial x^{\cdot}} + \cdots \tag{34.2}$$

$\mathcal{O}(h^2)$ の項を無視すると，これは（特別な座標を選ぶことによって）線形の場の方程式(32.1)になる．ここで使われる平面波は，この方程式の同次解である．今，$\mathcal{O}(h^2)$ のオーダーの項を取り上げ，それらを(34.1)の右辺に移すと

$$R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{R^{(1)}}{2}\eta_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} + \underbrace{\frac{c^4}{8\pi G}\frac{\partial h_{..}}{\partial x^{\cdot}}\frac{\partial h_{..}}{\partial x^{\cdot}}}_{\risingdotseq\, t^{\rm grav}_{\mu\nu}}\right) \tag{34.3}$$

となる．量 $t^{\rm grav}_{\mu\nu}$ は重力場の微分の 2 次形式であり，すべての非重力成分を含むエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ に付け加わることになる．よって $t^{\rm grav}_{\mu\nu}$ は，重力場のエネルギー運動量テンソルである．

(33.1)の形の平面波に対しては

$$\frac{\partial h_{..}}{\partial x^{\lambda}} \propto h\, k_{\lambda} \tag{34.4}$$

が成り立つ．ここで $h$ は波の振幅（たとえば $e_{11} = h$ と $e_{12} = 0$）である．(34.3) と (34.4) とから，数値係数まで含めて次が成り立つ．

$$t_{\mu\nu}^{\text{grav}} = \frac{c^4}{8\pi G}\, k_\mu\, k_\nu\, h^2 \tag{34.5}$$

直線偏波の波に対しては，この結果は厳密である．一般のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ に対してはエネルギー保存則 $\partial^\mu T_{0\mu} = 0$ が成り立つ．準ミンコフスキー座標では，これは $\partial_t T_{00} + \operatorname{div}(c\,T_{oi}\,\boldsymbol{e}^i) = 0$ となる．この連続の式から，$T_{00}$ はエネルギー密度，$c\,T_{0i}$ はエネルギー流束密度であることがわかる．例として，電磁気の場合のエネルギー密度 $T_{00}^{\text{em}} = (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)/8\pi$ とエネルギー流束密度（ポインティング・ベクトル）$\boldsymbol{S} = c\,T_{0i}^{\text{em}}\,\boldsymbol{e}^i = c\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/4\pi$ を思い出そう．

$x^3$– 方向の平面波は，波動ベクトル $(k^\mu) = (\omega/c,\, 0,\, 0,\, \omega/c)$ をもっている．この重力波(GW) のエネルギー流束密度 $\varPhi_{\text{GW}} = c\,t_{03}^{\text{grav}} = (c^5/8\pi G)\, k^0\, k^3\, h^2$ は

$$\boxed{\varPhi_{\text{GW}} = \frac{\text{エネルギー}}{\text{時間・表面積}} = \frac{c^3}{8\pi G}\,\omega^2\, h^2} \tag{34.6}$$

となる．これは単位時間当たり，単位表面積当たり，波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向に運ばれるエネルギーである．

## 完全な導出

これから数値係数を調べよう（(34.5)の一般化）．次の形

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \tag{34.7}$$

で $h_{\mu\nu}$ は波動解

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}\, \exp\left(-\mathrm{i}k_\lambda\, x^\lambda\right) + \text{c.c.} \tag{34.8}$$

であるとする．この波は源なしの場の方程式の解であり，(22.8)に対応して

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = 0 \tag{34.9}$$

である．場の方程式の 2 次のオーダーの項は右辺の源の項にもち込まれる．それは重力場のエネルギー運動量テンソル(22.17)である．

$$t_{\mu\nu}^{\text{grav}} = \frac{c^4}{8\pi G}\left[R_{\mu\nu}^{(2)} - \left(\frac{g_{\mu\nu}R}{2}\right)^{(2)}\right] \tag{34.10}$$

(34.7)と $R_{\mu\nu}^{(0)} = 0$，$R_{\mu\nu}^{(1)} = 0$，$R = g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}$ とから，この量は

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{\text{grav}} &= \frac{c^4}{16\pi G}\left[2R_{\mu\nu}^{(2)} - \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{(2)} + \eta_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{(1)} - h_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{(1)}\right] \\ &= \frac{c^4}{16\pi G}\left[2R_{\mu\nu}^{(2)} - \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}R_{\sigma\rho}^{(2)}\right] \end{aligned} \tag{34.11}$$

となる．ここで(34.7)の反変ベクトル

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \tag{34.12}$$

を使っており，それは $g^{\mu\nu}g_{\nu\kappa} = \delta^{\mu}_{\kappa}$ から出る．リッチ・テンソル

$$R_{\mu\kappa}^{(2)} = \left(g^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\nu\kappa}\right)^{(2)} = \eta^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\nu\kappa}^{(2)} - h^{\lambda\nu}R_{\lambda\mu\nu\kappa}^{(1)} \tag{34.13}$$

は曲率テンソル(18.11)

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}&\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu\,\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda\,\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda\,\partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}\right) \\ &+ g_{\eta\sigma}\left(\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{34.14}$$

から計算される．最初の行の項は，$g_{..} = \eta_{..} + h_{..}$ と置くと $R^{(1)}_{....}$ への寄与を与える．2 行目の項は $R^{(2)}_{....}$ とそれ以上の高いオーダーへ寄与する．$R^{(2)}_{....}$ に対しては，オーダー 1 のクリストッフェル記号を計算するだけで十分である．

$$\Gamma^{\sigma\,(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial h^\sigma{}_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h^\sigma{}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right] \tag{34.15}$$

これを使うと(34.13)に対して

$$R^{(2)}_{\mu\kappa} = -\frac{h^{\lambda\nu}}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left[\frac{\partial h^\nu{}_\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h^\nu{}_\sigma}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h^\nu{}_\nu}{\partial x^\sigma}\right]\left[\frac{\partial h^\sigma{}_\mu}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial h^\sigma{}_\kappa}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\kappa}}{\partial x_\sigma}\right]$$
$$-\frac{1}{4}\left[\frac{\partial h_{\sigma\kappa}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial h_{\sigma\lambda}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial h_{\lambda\kappa}}{\partial x^\sigma}\right]\left[\frac{\partial h^\sigma{}_\mu}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial h^{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h^\lambda{}_\mu}{\partial x_\sigma}\right] \tag{34.16}$$

を得る．ゲージ条件(32.16)，$2\,h^\nu{}_{\sigma|\nu} = h^\nu{}_{\nu|\sigma}$，のために，第2行の第1括弧の量は消える．他の項は $h$ の積で次の形を取っている．

$$\left[e_{..}\ \exp\left(-\mathrm{i}k_\lambda\, x^\lambda\right) + \text{c.c.}\right]\left[e_{..}\ \exp\left(-\mathrm{i}k_\lambda\, x^\lambda\right) + \text{c.c.}\right]$$

ここで $\exp(\pm 2\,\mathrm{i}\,k_\lambda\, x^\lambda)$ の形の振動項が出るが，座標依存性のない項も出る．振動項は時間平均で消える，よって

$$\left\langle\left(e_{..}\ \exp\left(-\mathrm{i}k_\lambda\, x^\lambda\right) + \text{c.c.}\right)\left(e_{..}\ \exp\left(-\mathrm{i}k_\lambda\, x^\lambda\right) + \text{c.c.}\right)\right\rangle = 2\,\mathrm{Re}\ \{e^*_{..}\, e_{..}\} \tag{34.17}$$

カギ括弧は時間平均を示し，“Re” は実数の部分を取ることを意味する．波動(34.8)に対しては，微分は

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\ldots) = -\mathrm{i}\,k_\lambda\,(\cdots) \tag{34.18}$$

となる．よって(34.16)は

$$\left\langle R^{(2)}_{\mu\kappa}\right\rangle = \mathrm{Re}\left\{e^{\lambda\nu *}\left[k_\mu k_\kappa e_{\lambda\nu} + k_\lambda k_\nu e_{\mu\kappa} - k_\lambda k_\kappa e_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu e_{\lambda\kappa}\right]\right\}$$
$$-\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\left[k_\lambda e_{\sigma\kappa} + k_\kappa e_{\sigma\lambda} - k_\sigma e_{\lambda\kappa}\right]^*\left[k^\lambda e^\sigma{}_\mu + k_\mu e^{\sigma\lambda} - k^\sigma e^\lambda{}_\mu\right]\right\} \tag{34.19}$$

となる．これは(32.20)

$$2\,k_\mu\, e^{\mu\nu} = k^\nu\, e^\lambda{}_\lambda \tag{34.20}$$

を使うともっと簡単化される．たとえば

$$e^{\lambda\nu\,*}\, k_\kappa\, k_\lambda\, e_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, k^\nu\ \left(e^\lambda{}_\lambda\right)^*\, k_\kappa\, e_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\, k_\mu\, k_\kappa\ \left|e^\lambda{}_\lambda\right|^2 \tag{34.21}$$

$k^{\lambda}\,k_{\lambda} = 0$ に気をつけると，(34.19) は

$$\left\langle R^{(2)}_{\mu\kappa} \right\rangle = \frac{1}{2}\,k_{\mu}\,k_{\kappa}\,\left( e^{\lambda\nu\,*}\,e_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\,\left|e^{\lambda}{}_{\lambda}\right|^{2} \right) \tag{34.22}$$

となる．よってエネルギー運動量テンソル (34.11) の最終結果は

$$t^{\,\mathrm{grav}}_{\mu\,\nu} = \frac{c^{4}}{16\,\pi\,G}\,k_{\mu}\,k_{\nu}\,\left( e^{\lambda\kappa\,*}\,e_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}\,\left|e^{\lambda}{}_{\lambda}\right|^{2} \right) \tag{34.23}$$

となる．(32.39) の波に対しては $e^{\lambda}{}_{\lambda} = 0$ が成り立つので，

$$t^{\,\mathrm{grav}}_{\mu\,\nu} = \frac{c^{4}}{8\,\pi\,G}\,k_{\mu}\,k_{\nu}\,\left( \left|e_{11}\right|^{2} + \left|e_{12}\right|^{2} \right) \tag{34.24}$$

となる．直線偏波の波（たとえば $e_{11} = h$，$e_{12} = 0$）に対してはこれから (34.5) を得る．

# 35　4重極放射

振動荷電粒子が電磁波を放射するように，振動する質量粒子は重力波を放射する．ここで振動する質量粒子が放射するパワーを計算する．

## 要約

われわれは電気力学の類推から放射されるパワーを定める．このとき，オーダー1の因子は無視する．おおよその知識を得るにはこの要約で十分である．

双極子モーメント $p$ をもって振動している電荷（振動数 $\omega$）は，電磁パワー（= エネルギー/時間）

$$P = \frac{\omega^4}{3\,c^3}\,p^2 \tag{35.1}$$

を放射する．双極子モーメントは $p \sim q\,\ell$ で，$q$ と $\ell$ とは電荷と振動している粒子の特性である．電気的4重極放射に対しては，$k\,r = \omega\,r/c$ の幅で遅延ポテンシャルに現れる係数 $\exp(i\,k\,r) = 1 + \mathrm{i}\,k\,r \pm \cdots$ を展開する．これは $p \to \mathcal{Q}_e \sim q\,\ell^2$ の置き換えに導き，さらに $\omega/c$ が掛かる．よって，電気4重極モーメント $\mathcal{Q}_e$ の放射パワーは

$$P = \mathcal{O}(1)\,\frac{\omega^6}{c^5}\,\mathcal{Q}_{\mathrm{e}}^2 \tag{35.2}$$

である．重心系では質量粒子に対して4重極モーメント $\mathcal{Q} \sim M\,\ell^2$ だけが存在し，双極子モーメントは存在しない．$q^2$ と $G\,M^2$ とは適当な単位系を選ぶと対応させることができる．よって，振動している質量粒子に対して(35.2)は

$$P = \mathcal{O}(1)\,\frac{\omega^6}{c^5}\,G\,\mathcal{Q}^2 \tag{35.3}$$

となる[2)]．正確な表記は

$$P = \frac{2\,G\,\omega^6}{5\,c^5}\left(\sum_{i,\,j=1}^{3}\left|\,\mathcal{Q}^{ij}\,\right|^2 - \frac{1}{3}\left|\sum_{i=1}^{3}\,\mathcal{Q}^{ii}\,\right|^2\right) \quad \text{振動している有限幅の質量の放射パワー} \tag{35.4}$$

2) 訳注：(35.2)から $P \propto \mathcal{Q}_{\mathrm{e}}^2 \sim q^2\,\ell^4$．$q^2 \sim G\,M^2$ とおくと，$P \sim G\,M^2\,\ell^4 \sim G\,\mathcal{Q}^2$．

である．ここで $Q^{ij} = \int d^3r\, x^i\, x^j\, \varrho$ は，大きさをもつ質量の 4 重極モーメントをデカルト座標で求めたものである．以降に，(35.4) の結果と放射の角度分布 $d\,P/d\,\Omega$ を具体的に導出する．

## 電磁波の放射

最初に電気力学における双極子放射の導出を振り返る．周期的で，空間的に局在している電荷分布の流速密度，すなわち電流密度

$$j_\alpha(\boldsymbol{r},\, t) = j_\alpha(\boldsymbol{r})\, \exp(-\mathrm{i}\,\omega\, t) + \mathrm{c.c.} \begin{cases} \neq 0 & (r \leq r_0) \\ = 0 & (r > r_0) \end{cases} \tag{35.5}$$

を遅延ポテンシャルを表す積分に代入すると

$$\begin{aligned} A_\alpha(\boldsymbol{r},\, t) &= \frac{1}{c} \int d^3r'\, \frac{j_\alpha(\boldsymbol{r}',\, t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\ &= \frac{1}{c}\, \exp(-\mathrm{i}\,\omega\, t) \int d^3r'\, j_\alpha(\boldsymbol{r}')\, \frac{\exp(\mathrm{i}\,k\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| >}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + \mathrm{c.c.} \\ &= A_\alpha(\boldsymbol{r})\, \exp(-\mathrm{i}\,\omega\, t) + \mathrm{c.c.} \end{aligned} \tag{35.6}$$

を得る．電荷分布の振動数 $\omega$ は，ポテンシャルの振動数でもあり電磁波の振動数でもある．$\omega/c$ に対しては波数

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\,\pi}{\lambda} \tag{35.7}$$

があてられ，放射される波の波長 $\lambda$ は同じように振動数 $\omega$ から決められる．

遠距離（$r \gg r_0$）の場に対しては，展開

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = r - \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}'}{r} \pm \cdots = r\, \left(1 + \mathcal{O}\,(r'/r)\right) \tag{35.8}$$

$$\exp(\mathrm{i}\,k\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) = \exp(\mathrm{i}\,k\,r)\, \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}')\, \left(1 + \mathcal{O}\,(r'/r)\right) \tag{35.9}$$

を使う．ここでベクトル

$$\boldsymbol{k} = k\, \frac{\boldsymbol{r}}{r} = k\, \boldsymbol{e}_r \tag{35.10}$$

を導入した．この展開を使うと，(35.6) の $A_\alpha(\boldsymbol{r})$ は

$$A_\alpha(\boldsymbol{r}) \approx \frac{\exp(\mathrm{i}\,k\,r)}{c\,r} \int d^3r'\, j_\alpha(\boldsymbol{r}')\, \exp(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}') \qquad (r \gg r_0) \tag{35.11}$$

となる．多くの系（たとえば原子）では，波長は振動している電荷の分布(35.5)よりはるかに大きい．

$$\lambda \gg r_0 \quad \text{または} \quad v \ll c \tag{35.12}$$

この条件は，分布している電荷のなかの最速値 $v \sim \omega r_0$ が非相対論的であるということと同値である．このことは，ベクトルポテンシャルの空間成分 $A_n$ に次の**長波長近似**が使えることを意味する．

$$\begin{aligned} A_n(\boldsymbol{r}) &= \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{cr} \int d^3r' j_n(\boldsymbol{r}') \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}') \\ &= \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{cr} \int d^3r' j_n(\boldsymbol{r}')(1 - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}' + \cdots) \approx \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{cr} \int d^3r' j_n(\boldsymbol{r}') \end{aligned} \tag{35.13}$$

残されている積分は，電荷分布の双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ で表される．

$$\int d^3r'\, j_n(\boldsymbol{r}') = -\int d^3r\, x_n \operatorname{div} \boldsymbol{j} = -\mathrm{i}\,\omega \int d^3r\, x_n\, \varrho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\,\omega\, p_n \tag{35.14}$$

ここで $\operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\,\omega\, \varrho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})$ を使った[3)]．これは振動している量(35.5)に対する連続の式から出てくる．

(35.13)の展開で，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}' \sim (\omega/c)\, r'$ に比例する項を取ると，双極子モーメント（$\sim q\,\ell$）の代わりに $\omega/c$ の掛かった4重極モーメント（$\sim q\,\ell^2$）を得る．これは(35.1)の代わりに(35.2)を生じさせる．

$A_n$ から場 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ とが計算できる．

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \quad \text{そして} \quad \boldsymbol{E} = (\mathrm{i}/k) \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \qquad (r > r_0) \tag{35.15}$$

2番目の式は自由場に対するマクスウェル方程式から出る．場は，面積 $r^2\, d\Omega$ を通るエネルギー束（エネルギー/時間）

$$dP = c\, T^{\mathrm{em}}_{0i}\, d f^i = c\, T^{\mathrm{em}}_{0i} \frac{x^i}{r}\, r^2\, d\Omega = \frac{c}{4\pi}\, r^2\, d\Omega\, \boldsymbol{e}_r \cdot [\, \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}\, ] \tag{35.16}$$

---

3) 訳注：右辺第 1 項から第 2 項への変形で $\operatorname{div}(x_n\, \boldsymbol{j}) = j_n + x_n \operatorname{div} \boldsymbol{j}$ を使っている

を定める．(35.15) における微分操作は $r^{-1}\exp(\mathrm{i}\,k\,r)$ に掛かる．指数関数の微分は $k$ を生じ，前にある係数の微分は $1/r^2$ を生む．十分遠方に観測点があるという前提

$$r \gg \lambda \tag{35.17}$$

では，係数 $1/r$ に掛かる微分は省略することができる．両方の場 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は，よって $p\,(\omega^2/c^2)/r$ に比例する．$\boldsymbol{p}$ のすべての成分が同じ位相をもつときは，(35.16) からよく知られた結果[4)]

$$\frac{d\,P}{d\,\Omega} = \frac{\omega^4}{2\,\pi\,c^3}\,|\,p\,|^2\sin^2\theta \tag{35.18}$$

が得られる．ここで $\theta$ は，電荷分布の双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ と観測の方向 $\boldsymbol{k}$ の間の角度である．総放射パワーは

$$P = \frac{4\,\omega^4}{3\,c^3}\,|\,p\,|^2 \tag{35.19}$$

となる．

## 重力波の放射

重力波放射の計算は電気力学を参考にして行われる．しかし，波源の項 $T_{\mu\nu}$ が 2 階のテンソルであるから，全体としてもっと手間がかかる．そこで次の手順に従って計算を行う．

1. 与えられた $T_{\mu\nu}$ から漸近的な場を求める．
2. 空間成分 $T_{ij}$ で書き表す．
3. 長波長近似．

電気力学とは対照的に双極放射はない．振動している質量分布 $\varrho(\boldsymbol{r},t) = \varrho(\boldsymbol{r})\,\exp(-\mathrm{i}\omega t)+\mathrm{c.c.}$ に対して，双極子モーメント

$$\boldsymbol{p} = \int d^3r\,\boldsymbol{r}\,\varrho(\boldsymbol{r}) = M\,\boldsymbol{R}_{\mathrm{c.m.}} \tag{35.20}$$

4) 通常の表式 $j_\alpha(\boldsymbol{r},\,t) = \mathrm{Re}\,(j_\alpha(\boldsymbol{r})\,\exp[-\mathrm{i}\,\omega\,t])$ は (35.5) とは振幅で 2 だけ異なる．この表式に合わせようとすれば (35.18) の右辺と (35.19) の右辺は 4 で割らなければならない．そうすれば (35.19) は (35.1) になる

は質量 $M$ と質量分布の重心座標 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{c.m.}}$ との積である．孤立系は形を変えずに運動するので，われわれは $\boldsymbol{R}_{\mathrm{c.m.}}=0$ となる重心系を慣性系として選ぶことができる[5)]．（系が孤立していない場合，放射を考慮しなければならない振動している質量がほかにもある．）重心系では $\boldsymbol{p}=0$ であるので，双極放射は存在しない．

電気力学では，双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ は一般に基準系の選択で消去されることはない．このことは，$\varrho_{\mathrm{e}}$ が正と負を取りうるということと関係している．特に二つの電荷 $+q$ と $-q$ に対しては $\boldsymbol{p}=q\,\boldsymbol{r}_{12}$ である．ここで $\boldsymbol{r}_{12}$ は，電荷を結んでいるベクトルである．この双極子モーメントは，慣性系の選び方には依存しない．

### 漸近的な場

われわれは，電気力学の計算をできるかぎり利用することにする．次のような周期的で空間的に限られた質量分布を想定する．

$$T_{\mu\nu}(\boldsymbol{r},t)=T_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})\ \exp(-\mathrm{i}\omega t)+\mathrm{c.c.}\begin{cases}\neq 0 & (r\le r_0)\\ =0 & (r>r_0)\end{cases}\tag{35.21}$$

遅延ポテンシャルは(22.28)から次のように与えられる．

$$h_{\mu\nu}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{4\,G}{c^4}\ \exp(-\mathrm{i}\,\omega\,t)\int d^3r'\,S_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}')\,\frac{\exp(\mathrm{i}\,k\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|>}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+\mathrm{c.c.}\tag{35.22}$$

ここで $S_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}\,T/2$ である．次の仮定

$$r_0\ll\lambda\ll r\tag{35.23}$$

のもとで，重力波放射を計算する．十分離れたところでわれわれは(35.8)-(35.11)のように展開し次を得る．

---

[5)] 訳注：特に注意しないかぎり慣性系で話を進めている．

$$h_{\mu\nu} \approx -\frac{4\,G}{c^4}\,\frac{\exp[\mathrm{i}\,(kr-\omega t)]}{r}\int d^3r'\,S_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}')\,\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')+\text{c.c.}$$
$$= -\frac{4\,G}{c^4}\,\frac{\exp(-\mathrm{i}\,k_\lambda\,x^\lambda)}{r}\,S_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})+\text{c.c.}$$
$$= e_{\mu\nu}(\boldsymbol{r},\omega)\,\exp(-\mathrm{i}\,k_\lambda\,x^\lambda)+\text{c.c.}\qquad (r\gg r_0) \tag{35.24}$$

指数関数 $\exp[\mathrm{i}\,(kr-\omega t)]$ は，$\exp(-\mathrm{i}\,k_\lambda\,x^\lambda)$ のように書かれている．ここで

$$(k^\lambda)=\left(\frac{\omega}{c},\boldsymbol{k}\right),\qquad \boldsymbol{k}=k\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}=k\,\boldsymbol{e}_r \tag{35.25}$$

である．(35.24) の積分は $S_{\mu\nu}$ のフーリエ変換になっている．

$$S_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})=\int d^3r\,S_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})\,\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{35.26}$$

これを使うと，(35.24) に導入されている波の振幅 $e_{\mu\nu}$ は

$$e_{\mu\nu}(\boldsymbol{r},\omega)=-\frac{4\,G}{c^4 r}\,S_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})=-\frac{4\,G}{c^4 r}\left(T_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})-\frac{T(\boldsymbol{k})}{2}\,\eta_{\mu\nu}\right) \tag{35.27}$$

から与えられる．この振幅は $1/r$ に比例し，$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{r}/r$ を通して $\boldsymbol{r}$ に，そして $k=\omega/c$ に依存する．$T_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}\,T/2$ の省略形 $S_{\mu\nu}$ は，以下ではもう使用することはない．

(35.16) と同じように，面積要素 $r^2\,d\,\Omega$ を通して出ていくエネルギーの流れ $d\,P$ は

$$d\,P=c\,t_{0i}^{\text{grav}}\,d\,f^i=c\,t_{0i}^{\text{grav}}\,\frac{x^i}{r}\,r^2\,d\,\Omega \tag{35.28}$$

に等しい．重力場のエネルギー運動量テンソル (34.23) によって，これは

$$\frac{d\,P}{d\,\Omega}=c\,\frac{c^4}{16\,\pi\,G}\,k_0\,\frac{k_i\,x^i}{r}\,r^2\left(e^{\lambda\,\nu\,*}e_{\lambda\,\nu}-\frac{1}{2}\left|e^{\lambda}{}_{\lambda}\right|^2\right) \tag{35.29}$$

となる．34 節では振幅 $e_{\mu\,\nu}$ は一定値であったが，ここでは $e_{\mu\,\nu}(\boldsymbol{r},\omega)\propto 1/r$ である．エネルギー運動量テンソル (34.3) は $h_{\mu\,\nu}$ の偏微分関数を含んでいる．一定値の振幅に対しては，この偏微分は係数 $k_\mu\ \sim\ 1/\lambda$ を生じさせる．$e_{\mu\,\nu}\ \propto\ 1/r$ に対しては，さらに係数 $1/r^2$ をもつ項を生じさせる．はるかに遠い観測点 $r\gg\lambda$ では，今述べた項は無視することができる．

(35.29) に$k_0 = \omega/c$ と $k_i x^i/r = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}/r = \omega/c$, (35.27) とを代入すると

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\,\omega^2}{\pi\,c^5}\left(T^{\mu\nu}(\boldsymbol{k})^*\,T_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{2}\,|\,T(\boldsymbol{k})\,|^2\right) \tag{35.30}$$

が得られる．このようにして，重力放射のパワーが波源の分布のフーリエ変換 $T_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})$ によって表された．

## 空間成分だけを使う表示

連続の式を使って $dP/d\Omega$ を空間成分 $T^{ij}$ だけで書き表す．

空間に分布している重力源(35.21)は次の形

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2\pi}\int d^3k\,T^{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\,\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)] + \mathrm{c.c.} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int d^3k\,T^{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\,\exp(-\mathrm{i}k_\lambda x^\lambda) + \mathrm{c.c.} \end{aligned} \tag{35.31}$$

に書き表される．保存則 $T^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0$ は，弱い場に対しては $T^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$ となる．(35.31) に対してこれは

$$k_\nu\,T^{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{35.32}$$

を意味し，特に $\mu = 0$ と $\mu = i$ に対しては

$$k_0\,T^{00}(\boldsymbol{k}) = -k_j\,T^{0j}(\boldsymbol{k}) \quad そして \quad k_0\,T^{i0}(\boldsymbol{k}) = -k_j\,T^{ij}(\boldsymbol{k}) \tag{35.33}$$

である．ここで 3 次元空間の単位ベクトルを導入する．

$$\hat{k}_i = \frac{k_i}{k_0} \tag{35.34}$$

すると (35.33) は下記のように書ける．

$$T^{i0} = T^{0i} = -\hat{k}_j\,T^{ij} \quad そして \quad T^{00} = \hat{k}_i\,\hat{k}_j\,T^{ij} \tag{35.35}$$

これによって (35.30) の非空間成分を取り除くことができる．くわしく書けば

$$T^{\mu\nu *}\,T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\,\eta_{\nu\sigma}\,T^{\mu\nu *}\,T^{\rho\sigma} = T^{00*}\,T^{00} - 2\sum_i T^{0i*}\,T^{0i} + \sum_{i,\,j} T^{ij*}\,T^{ij}$$
$$= \hat{k}_i\,\hat{k}_j\,\hat{k}_l\,\hat{k}_m\,T^{ij*}\,T^{lm} - 2\hat{k}_j\,\hat{k}_m\,\delta_{il}\,T^{ij*}\,T^{lm}$$
$$+ \delta_{il}\,\delta_{jm}\,T^{ij*}\,T^{lm} \tag{35.36}$$

$$T^{\lambda}{}_{\lambda} = \eta_{\lambda\rho}\,T^{\rho\lambda} = T^{00} - \sum_i T^{ii} = \hat{k}_j\,\hat{k}_i\,T^{ij} - \delta_{ij}\,T^{ij} \tag{35.37}$$

$$\left|T^{\lambda}{}_{\lambda}\right|^2 = \hat{k}_i\,\hat{k}_j\,\hat{k}_l\,\hat{k}_m\,T^{ij*}\,T^{lm} - \delta_{ij}\,\hat{k}_l\,\hat{k}_m\,T^{ij*}\,T^{lm} - \delta_{lm}\,\hat{k}_i\,\hat{k}_j\,T^{ij*}\,T^{lm}$$
$$+ \delta_{ij}\,\delta_{lm}\,T^{ij*}\,T^{lm} \tag{35.38}$$

となる．この表現を(35.30)に代入すれば

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\,\omega^2}{\pi\,c^5}\,\Lambda_{ij,lm}\,T^{ij*}(\boldsymbol{k})\,T^{lm}(\boldsymbol{k}) \tag{35.39}$$

となる．ここで

$$\Lambda_{ij,lm}(\theta,\phi) = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\delta_{lm} - 2\,\delta_{il}\,\hat{k}_j\,\hat{k}_m + \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\hat{k}_l\,\hat{k}_m$$
$$+ \frac{1}{2}\,\delta_{lm}\,\hat{k}_i\,\hat{k}_j + \frac{1}{2}\,\hat{k}_i\,\hat{k}_j\,\hat{k}_l\,\hat{k}_m \tag{35.40}$$

であり，これはベクトル $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$ の角度 $\theta$ と $\phi$ の関数である．

### 長波長近似

$\lambda \gg r_0$ であるので

$$T^{ij}(\boldsymbol{k}) = \int d^3r\,T^{ij}(\boldsymbol{r})\,\exp(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) = \int d^3r\,T^{ij}(\boldsymbol{r})\,(1 - \mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \cdots)$$
$$\approx \int d^3r\,T^{ij}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\omega^2}{2}\,\mathcal{Q}^{ij} \tag{35.41}$$

と書ける．ここで $\mathcal{Q}^{ij}$ は積分の代わりである．エネルギー保存則 $T^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$ より $\mu = i$ と $\mu = 0$ の場合

$$\partial_j\,T^{ij}(\boldsymbol{r},t) = -\partial_0\,T^{i0}(\boldsymbol{r},t) \quad \text{そして} \quad \partial_i\,T^{0i}(\boldsymbol{r},t) = -\partial_0\,T^{00}(\boldsymbol{r},t) \tag{35.42}$$

となる．これから

$$\partial_i \partial_j T^{ij}(\boldsymbol{r}, t) = \partial_0^2 T^{00}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\omega^2}{c^2} T^{00}(\boldsymbol{r}, t) \tag{35.43}$$

が得られる．この式で係数 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ を取り除くと

$$\partial_i \, \partial_j \, T^{ij}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\omega^2}{c^2} T^{00}(\boldsymbol{r}) \tag{35.44}$$

となる．これを(35.41)に使うと

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{ij} &= -\frac{2}{\omega^2} \int d^3r \, T^{ij}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\omega^2} \int d^3r \, x^i \, x^j \, \left( \partial_k \partial_l \, T^{lk}(\boldsymbol{r}) \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \int d^3r \, x^i \, x^j \, T^{00}(\boldsymbol{r}) = \int d^3r \, x^i \, x^j \, \varrho(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{35.45}$$

となる[6]．前提から $\lambda \gg r_0$（または $v \ll c$）が成り立ち，よって $T^{00} \approx \varrho c^2$ である．量 $\mathcal{Q}^{ij}$ は，質量分布の空間部分の **4 重極テンソル**である．(35.41)を使うと(35.39)より

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\,\omega^6}{4\pi\,c^5} \Lambda_{ij,lm} \, \mathcal{Q}^{ij*} \, \mathcal{Q}^{lm}} \tag{35.46}$$

が出る．双極放射が $\omega^4$ に依存しているのに対して，4 重極放射に典型的なのは $\omega^6$ に依存していることである．表式を評価する際，ユークリッド計量からのずれは無視できる．それで共変成分，反変成分の間の区別はなくなり，たとえば $\mathcal{Q}^{ij} = \mathcal{Q}_{ij}$ が成り立つ．

放射の角度依存性は $\Lambda_{ij,lm}(\theta, \phi)$ に含まれている．(35.40)によって，その角度は質量が分布している場所から観測点に向かっている単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{k}}$ で決められる．単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{k}}$ の方向は角度で書き表すことができて，デカルト座標では

$$\left(\hat{k}^i\right) = (\hat{k}_x, \, \hat{k}_y, \, \hat{k}_z) = (\sin\theta \, \cos\phi, \, \sin\theta \, \sin\phi, \, \cos\theta) \tag{35.47}$$

となる．例として円柱対称の 4 重極分布を主軸系 $(Q_{ij}) = \mathrm{diag}(\mathcal{Q}_1, \, \mathcal{Q}_1, \, \mathcal{Q}_3)$ で考える．これに対しては，放射は $\phi$ に依存しない．というのは，(35.46)で

[6] 訳注：$\partial_k \, \partial_\ell \, (x^i \, x^j \, T^{k\ell}) = -2\, T^{ij} + 2\, \partial_k \, (x^i \, T^{kj} + x^j \, T^{ki}) + x^i \, x^j \, \partial_k \, \partial_\ell \, T^{k\ell}$ を使っている．

$\hat{k}_x^2+\hat{k}_y^2$ か $\hat{k}_z^2$ のような組合せだけが現れるからである．(35.40) で $\hat{k}_i$ の成分は 4 乗が最大である．これは 4 重極放射に典型的な角度依存性

$$\frac{dP}{d\Omega}=a_1\,\cos^4\theta+a_2\,\cos^2\theta+a_3 \tag{35.48}$$

に対応している．係数 $a_i$ は $\omega^6$ と $\mathcal{Q}_{ii}$ の 2 乗に比例している．

全放射パワーを得るには，(35.46) をすべての角度にわたって積分しなければならない．(35.47) を使うと

$$\int d\Omega\,\hat{k}_i\,\hat{k}_j=\frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij} \tag{35.49}$$

$$\int d\Omega\,\hat{k}_i\,\hat{k}_j\,\hat{k}_l\,\hat{k}_m=\frac{4\pi}{15}\,(\delta_{ij}\,\delta_{lm}+\delta_{il}\,\delta_{jm}+\delta_{im}\,\delta_{jl}) \tag{35.50}$$

となる．(35.40) を積分すれば

$$\int d\Omega\,\Lambda_{ij,lm}=\frac{2\pi}{15}\,(11\,\delta_{il}\,\delta_{jm}-4\,\delta_{ij}\,\delta_{lm}+\delta_{im}\,\delta_{lj}) \tag{35.51}$$

となる．これによって (35.46) を角度積分することができて，

$$P=\int d\Omega\,\frac{dP}{d\Omega}=\frac{2\,G\,\omega^6}{5\,c^5}\left(\sum_{i,\,j=1}^{3}\left|\mathcal{Q}^{ij}\right|^2-\frac{1}{3}\left|\sum_{i=1}^{3}\mathcal{Q}^{ii}\right|^2\right) \tag{35.52}$$

を得る．これが全放射パワーである．最初の要約で述べたように，この結果の表式は電気力学の類推で容易に理解できるであろう．

# 36 重力波の源

重力波の源として次のような発生源を考察する：水素原子や一般的な回転体，実験室で回転している棒材，連星系，パルサー，超新星[7]．

## 水素原子

水素原子の半古典的な描像では，陽子（質量 $m_\mathrm{p} \gg m_\mathrm{e}$，電荷 $+e$）の周りを1個の電子（質量 $m_\mathrm{e}$，電荷 $-e$）が回っている．力の平衡 $m_\mathrm{e}\,v^2/a_\mathrm{B} = e^2 a_\mathrm{B}^2$ と角運動量条件 $\hbar = m_\mathrm{e}\,v\,a_\mathrm{B}$ で，ボーア(Bohr) 半径 $a_\mathrm{B} = \hbar^2/m_\mathrm{e}\,e^2$ と速度 $v = e^2/\hbar$ が決まる．ここで原子の振動数 $\omega_\mathrm{at} = v/a_\mathrm{B}$ と原子の単位エネルギー

$$E_\mathrm{at} = \hbar\,\omega_\mathrm{at} = \frac{e^2}{a_\mathrm{B}} = \alpha^2 m_\mathrm{e}\,c^2 \tag{36.1}$$

を導入する．$\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ は微細構造定数である．状態のエネルギー間隔は $E_\mathrm{at}$ の程度である．(35.1)の $P_\mathrm{em}$ と双極子モーメント $p \sim e a_\mathrm{B}$ とで，電気的双極放射によって一つだけ低い順位（たとえば基底状態）に遷移する時間 $\tau_\mathrm{em}$ を見積もる．するとその時間は

$$\tau_\mathrm{em} \sim \frac{E_\mathrm{at}}{P_\mathrm{em}} \sim \frac{e^2}{a_\mathrm{B}}\,\frac{c^3}{\omega_\mathrm{at}^4\,e^2\,a_\mathrm{B}^2} = \frac{\alpha^{-3}}{\omega_\mathrm{at}} \sim 10^{-10}s \tag{36.2}$$

となる．原子の励起状態の寿命のこの古典的な見積もりは，数値にいたるまで正しい結果を与える．(可視領域では $\hbar\omega \sim E_\mathrm{at}/10$ であり，他の数値係数をまとめると，これは $\tau_\mathrm{em} \sim 10^{-8}s$ となる．）　周回時間 $2\pi/\omega_\mathrm{at}$ と比べると放射はゆっくりしていて，$\alpha^{-3} \approx 10^6$ 回の周回の間に起こる．

重力波放射による励起状態の原子の崩壊を同様にして見積もってみる．(35.3)の $P_\mathrm{GW}$ と4重極モーメント $\mathcal{Q} \sim m_\mathrm{e} a^2$ を使うと，寿命として

$$\tau_\mathrm{grav} \sim \frac{E_\mathrm{at}}{P_\mathrm{GW}} \sim \frac{e^2}{a_\mathrm{B}}\,\frac{c^5}{\omega_\mathrm{at}^6\,G\,m_\mathrm{e}^2\,a_\mathrm{B}^4} = \frac{e^2}{G\,m_\mathrm{e}^2}\,\frac{\alpha^{-5}}{\omega_\mathrm{at}} \sim 10^{34}\,s \tag{36.3}$$

---
[7] さらに広範な概説を求めるのであれば，[文献 10] にある J. A. Lobo, *Sources of Gravitational Waves*, の 203-222 ページを見られたし．

を得る．ここで $G m_{\rm e}^2/e^2 \sim 10^{-39}$ は，重力相互作用と電磁的相互作用の強度の比である．さて，われわれの大まかな見積もりは次の値を与える．

$$\boxed{\frac{\tau_{\rm grav}}{\tau_{\rm em}} \sim \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{e^2}{G\,m_{\rm e}^2} \sim 10^{44} \quad \text{光子対重力子の遷移時間の比}} \tag{36.4}$$

これは，$10^{44}$ の光子が放射される間にたった 1 個の重力子が放射されることを意味している．よって，重力子を放射して原子が崩壊することを証明することは，実際はとても考えられない．

（非相対論的）量子力学による電子の記述は，シュレディンガーの波動関数 $\psi$ による．したがって，電磁気の場合(35.1)の双極子モーメントは対応する行列成分，たとえば 2p 状態から 1s 状態への遷移に対しては

$$p_i = -e\int d^3 r\,\psi_{\rm 1s}^*\,x_i\,\psi_{\rm 2p} \tag{36.5}$$

で置き換えられることになる．重力子の放射による崩壊の場合，4 重極オペレーターの行列要素はゼロではない．これは，たとえば $3d \to 1s$ の遷移に対してそうである．それで放射を表す公式では，行列要素

$$\mathcal{Q}_{ij} = m_{\rm e}\int d^3 r\,\psi_{\rm 1s}^*\,x_i\,x_j\,\psi_{\rm 3d} \tag{36.6}$$

で置き換えられる．数係数を別にすれば，求まった放射の式を使って(36.3)が導かれる．

## 回転体

回転している剛体からの重力波を計算する．そのためにまず，剛体に固定した座標系 KS′ を考え，その座標を $x'_n$ とする．KS′ では，質量密度 $\varrho'(\boldsymbol{r}')$ は時間に依存しない．さて，（対角和がゼロでない）4 重極テンソル $\Theta'_{ij}$ が対角であるように KS′ を選ぶ．すなわち

$$\Theta' = \left(\Theta'_{ij}\right) = \left(\int d^3r'\,x'_i\,x_j\,\varrho'(\boldsymbol{r}')\right) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{36.7}$$

この物体は，空間に固定した $x'_3$ 軸の周りを角速度 $\Omega$ で回転しているものとする．座標 $x_n$ をもつ慣性系(IS) への直交変換は

$$x_n = \alpha_n^m(t)\, x'_m \tag{36.8}$$

のように書ける．ここで

$$\alpha\,(t) = (\alpha_n^m) = \begin{pmatrix} \cos\Omega\, t & -\sin\Omega\, t & 0 \\ \sin\Omega\, t & \cos\Omega\, t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36.9}$$

であり，$x_3$ 軸と $x'_3$ 軸とは一致する．次いで慣性系 IS における $\Theta_{ij}$ を定める．

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}(t) &= \int d^3\, r\, x_i\, x_j\, \varrho\,(\boldsymbol{r},\, t) = \int d^3 r'\ (\alpha_i^n\, x'_n)\,(\alpha_i^m\, x'_m)\ \varrho'(\boldsymbol{r}') \\ &= \big(\alpha\,(t)\,\Theta'\,\alpha(t)^{\mathrm{T}}\big)_{ij} \end{aligned} \tag{36.10}$$

変換に際して体積要素と質量密度はスカラーのように振る舞う，すなわち，$d^3 r = d^3 r'$ であり，$\varrho\,(\boldsymbol{r}) = \varrho'(\boldsymbol{r}')$ である．(36.7) と (36.9) とにより，(36.10) を成分ごとに評価すると

$$\Theta_{11}(t) = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2}\cos(2\Omega\, t) \tag{36.11}$$

$$\Theta_{12}(t) = \frac{I_1 - I_2}{2}\sin(2\Omega\, t) \tag{36.12}$$

$$\Theta_{22}(t) = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2}\cos(2\Omega\, t) \tag{36.13}$$

$$\Theta_{33}(t) = I_3, \qquad \Theta_{13}(t) = \Theta_{23}(t) = 0 \tag{36.14}$$

となる．これは

$$\Theta_{ij}(t) = \text{const.} + [\,\mathcal{Q}_{ij}\ \exp(-2\,\mathrm{i}\,\Omega\, t) + \text{c.c.}] \tag{36.15}$$

という形になる．ここで

$$(\mathcal{Q}_{ij}) = \frac{I_1 - I_2}{4}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{36.16}$$

である．(36.15) の const. の部分は放射に寄与しないので無視してよい．また，(36.15) の $Q_{ij}$ は，振動している質量分布の時間に依存しない部分である．よってこれは，前節で導入した $Q_{ij}$ と同じ意味をもっている．振動している質量分布の振動数は $\omega = 2\,\Omega$ であり，係数 2 は，状態は半分回ると元に戻るために生じる．

この先，次に定義する回転軸に関する慣性モーメント $I$ と剛体の偏極率 $\epsilon$ を使う．

$$I = I_1 + I_2\,, \qquad \epsilon = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \tag{36.17}$$

これを使うと，(36.16) の係数は $I\,\epsilon/4$ に等しい．(35.4) に (36.16) と $\omega = 2\,\Omega$ とを代入する．すると

$$\boxed{P = \frac{32\,G\,\Omega^6}{5\,c^5}\,\epsilon^2 I^2 \qquad \text{回転している質量分布からの放射パワー}} \tag{36.18}$$

を得る．

## 回転している棒材

実験室で重力波を発生させるために，重さ $M$，長さ $L$ の回転している棒材を考える．棒材は軸の周りを回転数 $\Omega$ で回っており，その軸は棒材の中心を基点にし，それに垂直に伸びているものとする．試験材は

$$M = 5 \times 10^5\,\mathrm{kg} = 500\,\mathrm{t}, \qquad L = 20\,\mathrm{m}, \qquad \Omega = 30\ \mathrm{s}^{-1} \tag{36.19}$$

くらいは可能であろう．$\Omega$ の限界は材質の抗張力から与えられる．棒材に対して

$$I \approx I_1 = \frac{M\,L^2}{12}, \qquad I_2 \approx 0, \qquad \epsilon \approx 1 \tag{36.20}$$

が成り立つ．これを (36.18) に代入すると

$$P \approx 2.4 \times 10^{-29}\,\mathrm{W} \tag{36.21}$$

が得られる．回転している棒材のエネルギー収支を考えれば，この放射損失は計測できないことは明らかである．棒材から出るエネルギー束密度

$$\varPhi_{\mathrm{GW}} \sim \frac{P}{L^2} \approx 6 \times 10^{-32}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \qquad \text{(棒材)} \tag{36.22}$$

はどんな計測限界よりもはるかに小さい (37 節).

## 連星系

連星系では二つの星（質量 $M_1$ と質量 $M_2$）がケプラー楕円を描いて運動している．特別な場合には円軌道も可能である．これに対しては星の間の距離 $r$ は一定であり，系は

$$I \approx I_1 = \frac{M_1\, M_2\, r^2}{M_1 + M_2}, \qquad I_2 \approx 0, \qquad \epsilon \approx 1 \tag{36.23}$$

をもつ剛体の回転体として取り扱える．円軌道は重力と中心力との釣り合いから決まり

$$\frac{M_1\, M_2}{M_1 + M_2}\, \Omega^2 r = G\, \frac{M_1\, M_2}{r^2}, \quad \text{すなわち} \quad \Omega^2 = G\, \frac{M_1 + M_2}{r^3} \tag{36.24}$$

となる．この軌道回転数 $\Omega$ と (36.23) を (36.18) に代入すると

$$P = \frac{32\, G^4}{5\, c^5}\, \frac{M_1^2\, M_2^2\, (M_1 + M_2)}{r^5} \tag{36.25}$$

を得る．この放射はエネルギーの損失を意味する．これによって距離 $r$ が絶え間なく減少し，**巻き込み時間** $t_{\rm spir}$ 後に二つの星は衝突する．この時間 $t_{\rm spir}$ を計算する．ケプラー問題では，系の全エネルギー $E$ はポテンシャルエネルギーの半分に等しい，よって

$$E = -G\, \frac{M_1 M_2}{2r} \tag{36.26}$$

である．放射 (36.25) によって，このエネルギーは $dE = -P dt$ のようにゆっくり小さくなる．これから

$$P = -\frac{dE}{dt} = -G\, \frac{M_1 M_2}{2\, r^2}\, \frac{d\, r}{d\, t} = \frac{32\, G^4}{5\, c^5}\, \frac{M_1^{\,2}\, M_2^{\,2}\, (M_1 + M_2)}{r^5} \tag{36.27}$$

となる．$x\,(t) = (r\,(t)/r\,(0))^4$ を使うと，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{256\, G^3}{5\, c^5}\, \frac{M_1\, M_2\, (M_1 + M_2)}{r(0)^4} = -\frac{1}{t_{\rm spir}} \tag{36.28}$$

を得る．この解は $x(t)=1-t/t_{\rm spir}$，または

$$r(t)=r(0)\left(1-\frac{1}{t_{\rm spir}}\right)^{1/4} \tag{36.29}$$

である．同じ質量の二つの星 $(M_1=M_2=M)$ に対しては，巻き込み時間は

$$t_{\rm spir}=\frac{5}{512}\left(\frac{c^2 r(0)}{GM}\right)^3\frac{r(0)}{c} \tag{36.30}$$

に等しい．例として，$M=M_\odot$ と $r(0)=10R_\odot$ を代入してみよう．太陽表面の重力ポテンシャルの強度に対するよく知られた値 $(GM_\odot/c^2R_\odot\approx 2\times 10^{-6})$ と太陽半径 $(R_\odot/c\approx 2.3\ {\rm s})$ とを使うと，$t_{\rm spir}\sim 10^{12}\,{\rm yr}$ を得る．これは宇宙の年齢よりもはるかに長い．

## PSR 1913+16

連星系 PSR 1913+16 は，一つのパルサーと目では見えない一つの伴星とからなっている．この伴星もいずれ中性子星になると考えられている．この連星系の信号はずいぶん前から記録され調べられている．このパルサーの非常に規則正しい信号（周期 $\tau=0.06$s）の位相差の観測から軌道のデータが導き出された[8)]．特に軌道周期 $T=2\pi/\Omega$ と質量は

$$\text{PSR } 1913+16: \quad \begin{aligned} T &= 27\,906.9807807\pm 0.000\,000\,9\,s \\ M_1 &= (1.4\,411\pm 0.000\,7)\,M_\odot \\ M_2 &= (1.3\,873\pm 0.0007)\,M_\odot \end{aligned} \tag{36.31}$$

である．PSR 1913+16 の軌道は歪みの大きい楕円である．いままで円軌道を考えてきたので，ここではオーダーの見積もりだけが可能である．(36.24) と (36.31) とから，二つの星の今現在の距離 $r$ が出る．この距離を $r(0)$ として (36.30) に代入すると

$$t_{\rm spir}\sim 10^9\,{\rm yr} \tag{36.32}$$

---

[8)] J. H. Taylor et al., Nature 355 (1992) 132. この連星系の発見(1974) とそれにつづく解析に対して，R. A. Hulse と J. H. Taylor は 1993 年ノーベル賞を与えられた．

を得る．さて，ケプラー則 $T^2 \propto r^3$ は $2\,dT/T = 3\,dr/r$ を暗示する．一方，(36.30) から $(dr/dt)_0 = -(1/4)r(0)/t_{\rm spir}$ が出るので，これらを使えば

$$\frac{dT}{dt} = \frac{3}{2}\frac{T}{r}\frac{dr}{dt} = -\frac{3}{8}\frac{T}{t_{\rm spir}} \approx -10^{-12} \qquad (36.33)$$

が得られる．脈動（パルス）の位相差から，軌道周期のこの変化は観測で決められる．計測から次の軌道周期の減少

$$\frac{dT}{dt} = -(2.425 \pm 0.010) \times 10^{-12} \qquad (\text{PSR} \quad 1913{+}16) \qquad (36.34)$$

が得られる．われわれの見積もり (36.33) は，この効果のオーダーをよく表している．観測結果の綿密な解析によって，観測された減衰は相対誤差 1% で理論的な計算と一致することが明らかになった．このほかにも考えられる効果があり，それらの議論を経て，重力波放射が軌道の減衰に対する唯一の可能な説明であるという結論になった．このことから，この観測は重力波放射の間接的な証拠と見なされる．

## i Boo

連星系 i Boo に対しては，距離[9] $D$，周期 $T$ そして質量 $M_1$ と $M_2$ はよく知られていて，それらは

$$\text{i Boo}: \quad D = 12\,\text{pc}, \quad T = 0.268\,\text{d}, \quad \begin{aligned} M_1 &= 1.35\,M_\odot \\ M_2 &= 0.68\,M_\odot \end{aligned} \qquad (36.35)$$

である．この系は地球に比較的近く，軌道周期も小さいので好都合である．(36.24)，(36.25)，(36.35) から，i Boo から放出される放射パワーは

$$P \approx 3.2 \times 10^{23}\,\text{W} \qquad (36.36)$$

である．重力波の直接的な証拠として重要なのは地球に流れ込むエネルギー密度束 $\varPhi_{\rm GW}$ であり，それは

$$\varPhi_{\rm GW} = \frac{P}{4\pi D^2} \approx 1.8 \times 10^{-13}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \qquad (\text{i Boo}) \qquad (36.37)$$

である．

[9] 天文学的な距離は光年 (ly) またはパーセク (pc) で与えられる．ここで $1\,\text{pc} \approx 3.26\,\text{ly}$ である．

## 合体する連星

(36.25)より $P \propto 1/r^5$ である．このことから，強い放射損失は小さい $r$ をもつ連星から得られる．考えられる最小の軌道間距離は $r = R_1 + R_2$ であり，$R_1$ と $R_2$ とはそれぞれの星の半径である．次のパラメター

$$M_1 = M_2 = M_\odot, \quad r = 30\,\mathrm{km}, \quad D = 10^3\,\mathrm{pc} \tag{36.38}$$

は二つの中性子星（5 から 10 km の半径 $R_1$，$R_2$）の系に関して可能である．想定している距離 $D$ は，銀河の直径 $3 \times 10^4$ pc に比べれば小さい．だからこの連星系は太陽系の近所にあってもよい．

(36.24)から次の軌道周期が出，(36.28)から巻き込み時間が出る．

$$T \approx 2\,\mathrm{ms}, \quad t_{\mathrm{spir}} \approx 8\,\mathrm{ms} \tag{36.39}$$

このように，この二つの星はすぐに合体する．

PSR 1913+16 または i Boo と対照的に，この巻き込み時間は軌道周期に比べてそれほどオーダーが違わない．よって軌道周期の変動は著しく，源は準周期的である．そのうえに運動は相対論的であり，発生している重力場は強い．よって計算に入っているいくつかの仮定（ニュートン場のなかでの周期的，非相対論的な運動，放射に対する 4 重極公式）は正当化されない．したがって，結果はオーダー的な評価としてだけ役に立つ．

(36.38)に対して(36.25)を求めると

$$P \approx 10^{47}\,\mathrm{W} \tag{36.40}$$

を得る．地球上に流れ込むエネルギー流束は

$$\varPhi_{\mathrm{GW}} = \frac{P}{4\pi D^2} \approx 10^7\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \qquad \text{（合体する連星）} \tag{36.41}$$

である．しかしながらこの高エネルギー流束（太陽光束 $10^3\ \mathrm{W/m}^3$ と比べてみよ）は，（$t_{\mathrm{spir}} \approx 0.01\,\mathrm{s}$ であるので）ほんの短い時間しかつづかない．この連星に対する人為的な仮定は楽観的であるが，的はずれのものではない．

## パルサー

1967 年に発見されたパルサーでは，その周期の増大が厳密に計測される．パルサーは中性子星（43 節）であり，その質量は $M \sim M_\odot$ で半径は 5 ないし 10 km である．この観測された周期の増大が重力波放射によるエネルギー損失で説明できるかどうか調べてみる．

カニ星雲の中心にパルサー NPO 0532 があり，これは非常に精密に調べられている．その周期は

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = 0.033\,\mathrm{s} \qquad (\mathrm{NPO\ 0532}) \tag{36.42}$$

である．時折，非連続的な変動が星震（星の地震）のために起こるが，これを除くとこの周期は次のように増えつづけている．

$$\dot{\tau} = \frac{d\tau}{dt} = -\frac{2\pi\,\dot{\Omega}}{\Omega^2} = 4.2 \times 10^{-13} \quad (\mathrm{NPO\ 0532}) \tag{36.43}$$

中性子星 NPO 0532 は質量 $M \sim 1.4 M_\odot$ であり，計算から出る半径は約 10 km である．正確な半径と密度分布は前提となる状態方程式に依存する．モデル計算では，慣性モーメント $I$ は次の範囲にある．

$$3 \times 10^{37}\,\mathrm{kg\,m^2} \le I \le 3 \times 10^{38}\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{36.44}$$

さて，放射される重力エネルギーによる回転エネルギーの減少を説明しよう．

$$\frac{d}{dt} E_{\mathrm{rot}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{I\,\Omega^2}{2}\right) = I\,\Omega\,\dot{\Omega} = -P\,(\text{式}(36.18)) = \frac{32\,G\,\Omega^6}{5\,c^5}\,\epsilon^2 I^2 \tag{36.45}$$

(36.44) からの $I$ の中間値と，(36.42) からの $\Omega$ と，(36.43) からの $\dot{\Omega}$ に対して次の値を得る．

$$\epsilon \approx 6 \times 10^{-4} \tag{36.46}$$

極端に強い重力場が，この大きさの偏極率を可能にしているとはとても考えられない．これに対して，中性子の初期状態（たとえば生成後の早い時期）に大きな変形があって，対応する重力波の放射があるのは考えられることである．

エネルギー損失に関する別の説明としては磁気双極放射がある．

$$\frac{d}{dt}E_{\mathrm{rot}} = I\,\Omega\,\dot{\Omega} = -P_{\mathrm{em}} = -\frac{2\,\mu^2}{3\,c^3}\,\Omega^4 \tag{36.47}$$

ここで $\mu$ は回転軸に垂直な磁気双極子モーメントである．これから観測された制動(36.43)を得るためには，磁気モーメントは

$$\mu = 2.5\times 10^{24}\ \mathrm{Gauss\,m^3} \tag{36.48}$$

でなければならない．別の観測（ランダウ準位間の電子の遷移）から，強度 $B\sim 10^{12}$ Gauss の磁場の存在が推測される．星の半径 $R\approx 10^4$ m を使うと，$\mu\sim B\,R^3$ に対して(36.48)の大きさの値が得られる．

この二つの可能性を見分ける方法は $\ddot{T}$ を測ることだろう．(36.45)と(36.47)とに対して

$$\Omega\,\dot{\Omega} = \mathrm{const.}\times\Omega^n\,,\qquad n = \begin{cases} 6 & \text{重力放射} \\ 4 & \text{磁気双極放射} \end{cases} \tag{36.49}$$

が成り立つ．これを時間について微分すると

$$\Omega\,\ddot{\Omega} + \dot{\Omega}^2 = \mathrm{const.}\times n\,\Omega^{n-1}\dot{\Omega} = n\,\dot{\Omega}^2 \tag{36.50}$$

または

$$\frac{\Omega\,\ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2} = n-1 = 2-\frac{T\,\ddot{T}}{\dot{T}^2} \tag{36.51}$$

を得る．これから

$$\frac{T\,\ddot{T}}{\dot{T}^2} = \begin{cases} -3 & \text{重力放射} \\ -1 & \text{磁気双極放射} \end{cases} \tag{36.52}$$

が出る．減衰 $\dot{T}$ の変動 $\ddot{T}$ を測ると，二つの制動機構を区別することができる．しかし現在のところ，データは $\ddot{T}$ を定めるほど十分に信頼できるものではない．

このパルサーの制動が主として重力波放射によって引き起こされる場合には（かなり考えにくいが），距離

$$D = 2000\,\mathrm{pc} \tag{36.53}$$

で，エネルギー流束は

$$\Phi_{\mathrm{GW}} = \frac{P}{4\pi D^2} \approx 4 \times 10^{-10}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \qquad (\text{NPO 0532}) \tag{36.54}$$

となる．

## 超新星

超新星は星の重力崩壊によって発生する（47 節）．中心にパルサー NPO 0532 をもつカニ星雲は，有名な 1054 年の超新星爆発の残骸である．超新星爆発の際とその後に起こる過程に関して，モデルとなる考えがある．まず非常に速い（時間 $2 \times 10^{-3}$ s）崩壊の後，大きく変形した中性子星ができるであろう．この星は周期 $T \sim 10^{-3}$ s で震動し回転し，それらは 0.1 s ほどつづいて減衰する．全体として $\Delta t \sim 0.1$ s ほどの重力波放射のパルスを見積もれる．この放射パルスの振動数分布の中間値 $\bar{\nu}$ とその幅 $\Delta\nu$ に対して

$$\bar{\nu} \sim \Delta\nu \sim 10^3\,\mathrm{Hz} \tag{36.55}$$

が成り立つ．重力波の形で自由になるエネルギー $\Delta E_{\mathrm{GW}}$ は太陽質量の最大数パーセントであろう．モデル的な見積もりでは，次のようにその値にはかなり巾がある．

$$\Delta E_{\mathrm{GW}} \approx 10^{-6} \sim 10^{-2}\,M_{\odot}c^2 \tag{36.56}$$

われわれの銀河，すなわち天の川の内部では，ほぼ 20 年に 1 個の超新星の誕生がやっと期待できる．それに対して，われわれの近くには 2500 の星雲を含む乙女座銀河団があって，高い頻度で発生する超新星の観測ができる．その距離は

$$D = \begin{cases} 2 \times 10^7\,\mathrm{pc} & (\text{乙女座銀河団}) \\ 2 \times 10^4\,\mathrm{pc} & (\text{天の川の中心}) \end{cases} \tag{36.57}$$

である．前記の楽観的な限界値 $\Delta E_{\mathrm{GW}} = 10^{-2}\,M_{\odot}c^2$ を使うと，短い時間間隔 $\Delta t \sim 0.1$ s の間に次のエネルギー束が地球に流れ込む．

$$\Phi_{\mathrm{GW}} \sim \frac{\Delta E_{\mathrm{GW}}}{4\pi D^2\,\Delta t} \sim \begin{cases} 4 \times 10^{-3}\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} & (\text{乙女座銀河団の超新星}) \\ 4 \times 10^{3}\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} & (\text{天の川の超新星}) \end{cases} \tag{36.58}$$

**演習**

36.1:　二つの質量（$M_1 \approx M_2 \approx M$）が互いの重力の影響のもとで円軌道を回っている．一周当たりの相対的なエネルギー損失 $\Delta E/|E|$ を見積もってみよ．ただし，次の関数として求めよ．

– 距離 $r$
– 軌道上の速度 $v$

36.2:　連星系 PSR $1913+16$ に対しては質量と周回周波数が知られている．すなわち，$M_1 \approx M_2 \approx M = 1.4\,M_\odot$ そして $\Omega \approx 2.2 \times 10^{-4}$ s．4 極放射公式に対する仮定 $v \ll c$ が成り立つか？

36.3:　太陽を回る地球の軌道運動は重力波の放射につながる．放射損失 $P$ を Watt で与えよ．

地球 − 太陽の距離： $r = 8$ 光分 (lightminutes)

周回周波数： $\Omega = 2\,\pi/(365\,\text{日})$

地球の質量： $M_\text{E} \approx 6 \times 10^{24}$ kg

36.4:　二つの星（質量 $M_1 = M_2 = M$）が相対距離 $r$ で回っている．その連星から地球までの距離は $D$ である．地球に到達する重力波は

$$h = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{r_\text{S}^2}{D\,r} \tag{36.59}$$

の振幅をもつことを示せ．ここで $r_\text{S} = 2\,G\,M/c^2$ である．

# 37 重力波の検証

重力波放射の検証に使われる二つのタイプの測定器について議論する[10)].

1. 干渉検出器：複数の自由粒子が重力波の場にあると，互いの距離が変動し，その距離は波の強度に比例する．われわれは距離の変化がレーザー干渉計で計測できるかどうかを議論する．
2. 共鳴検出器：重力波の力は振動的かつ 4 重極的な変位を生む．したがって，剛体では重力波は 4 重極振動を励起する．共鳴の場合は，非常に小さな力でも，検出できる大きさの振動を引き起こすことができる．

## 長さの変化

二つの自由落下粒子の物理的な距離 $L$ は，振幅 $h$ の重力波の場のなかで次の $\Delta L$ だけ変わる．

$$\frac{\Delta L}{L} = h\cos(\omega t) \tag{37.1}$$

これは(33.12)から出るもので，$\Delta L = \rho - L$，かつ $e_{11} = h, e_{12} = 0$，$\varphi = \pi/2$ である．(37.1)によって，計測可能な相対な長さの変動 $\Delta L/L$ は重力波の振幅 $h$ と関連づけられる．長さの変動は波の進行方向に垂直である．

干渉検出器では，$L$ はレーザー光の光路程である．式(37.1)は自由粒子に対して成り立つ．結びついている粒子の変位は同様に波の振幅 $h$ に比例する．しかし追加の因子が生じて，それは共鳴検出器では信号を大幅に増幅する．

エネルギー流束 $\varPhi_{\rm GW}$ に対する式(34.6)を振幅 $h$ に関して解く．すると

$$h = \sqrt{\frac{8\pi G\varPhi_{\rm GW}}{c^3\omega^2}} = 1.4\times 10^{-18}\left(\frac{\varPhi_{\rm GW}}{\rm W/m^2}\right)^{1/2}\frac{T}{\rm s} \tag{37.2}$$

[10)] 概要については [文献 10] にある N. A. Robertson, *Detection of Gravitational Waves*, 223-238 ページを見よ．さらに F. Ricci and A. Brillet, *A Review of Gravitational Wave Detectors*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 47 (1997) 111 を参照せよ．

となる．ここで $\omega = 2\pi/T$ であり，さらに $G$ と $c$ に対する数値が代入された．前の節で与えられたエネルギー流束 $\Phi_{\mathrm{GW}}$ と振動周期 $T$ に対して次の値が得られる．

$$h \approx \begin{cases} 10^{-34} & \text{棒材, (36.22)} \\ 10^{-20} & \text{連星 i Boo, (36.37)} \\ 10^{-17} & \text{崩壊型連星, (36.41)} \\ 10^{-24} & \text{パルサー NPO 0532, (36.54)} \\ 10^{-22} & \text{超新星/乙女座銀河団, (36.58)} \\ 10^{-19} & \text{超新星/天の川銀河, (36.58)} \end{cases} \qquad (37.3)$$

いくつかの場合は，（崩壊型連星に対する $10^7\ \mathrm{W/m^2}$ のように）相当なエネルギー流束がありながら，一般に重力波によって引き起こされる長さの変動は極端に小さい．

(37.3) の下から 3 行目の行は，楽観的なエネルギー流束の見積りが基礎に成っている．よって，振幅の値は 10 から 20 乗小さいかもしれない．崩壊型連星の場合，与えられたエネルギー流束は 0.01 s という短い時間間隔の間に放出される．短い時間間隔という意味ではまた超新星の場合も同様である．これに対して i Boo は，よく知られたパラメターをもつ継続型の源であり，その重力波放射の振幅と振動数は確定したものと受け取られている．崩壊しそうにない連星系は，重力波放射の直接的な証拠のもっとも有望な候補であろう．

## 干渉検出器

多くの研究グループが，二つの鏡の間を往復する**レーザー光の干渉**を使って重力波を検出しようとしている．そのために鏡のついた二つの質量（約 1000 kg）を距離 $L$ 離して振り子のように釣り下げる．振り子の振動数 $\omega_0$ は波の振動数 $\omega$ に比べるとはるかに小さいので，質量は自由粒子のように運動する．$L$ に垂直に走る波は物理的な距離の変動 $\Delta L$ を引き起こす．これは鏡の間の距離を走るレーザー光に位相のずれ $\Delta\phi = 2\pi\,\Delta L/\lambda_\gamma$ をもたらす．ここで

$\lambda_\gamma$ は光の波長である．計測精度は，距離 $L$ を走る往復回数 $N$ と高レーザー出力 $I$ によって高められる．

(37.1) から，最大と最小のずれ $\varDelta L$ の間の時間は $\delta t = \pi/\omega$ である．この時間間隔の間に，光は鏡の間の距離 $L$ を $N$ 回横断する．1 回の光路程は意味がない，というのは，計測に掛かるずれは非常に小さいからである．よって

$$N\,L = c\,\delta t = \pi\,\frac{c}{\omega} \qquad \text{(最大の光路程)} \tag{37.4}$$

が最大の，意味のある光路程である．この距離 $N\,L$ は重力波の影響で $N\,\varDelta\,L$ だけ変化する．これは位相差

$$\varDelta\,\phi_{\mathrm{GW}} = 2\,\pi\,\frac{N\varDelta L}{\lambda_\gamma} = \pi\,\frac{\omega_\gamma}{\omega}\,h \qquad \text{(重力波の位相差)} \tag{37.5}$$

に対応する．位相 $\phi$ とレーザー光の光子の数 $N_\gamma$ は相補的な量子力学の変数である．すなわち，$\varDelta\,\phi_{\mathrm{qm}}\,\varDelta N_\gamma\ \ge\ 1/2$ である．コヒーレントな場合は，$\varDelta N_\gamma \approx \langle N_\gamma\rangle^{1/2}$ である（$\langle N_\gamma\rangle$ の周りに $N_\gamma$ がガウス分布をしているような場合）．よって

$$\varDelta\,\phi_{\mathrm{qm}} \ge \frac{1}{2\,\varDelta N_\gamma} \approx \frac{1}{2\,\sqrt{\langle N_\gamma\rangle}} \qquad \text{（量子力学的位相の不確定性）} \tag{37.6}$$

光の最大の走行時間 $\delta\,t = \pi/\omega$ の間にレーザー光（パワー $P_\gamma$）は総エネルギー $P_\gamma\,\delta\,t$ を生み出す．よって，（エネルギー $\hbar\omega_\gamma$ の）光子の数は

$$\langle N_\gamma\rangle \approx \frac{\pi\,P_\gamma}{\omega}\,\frac{1}{\hbar\,\omega_\gamma} \tag{37.7}$$

である．実験的な検証のためには，信号は位相の不確定性よりも大きくなければならない．すなわち

$$\varDelta\,\phi_{\mathrm{GW}} \ge \varDelta\,\phi_{\mathrm{qm}} \tag{37.8}$$

ここに (37.5) – (37.7) を代入し，$h$ について解くと

$$\boxed{h\ \ge\ \sqrt{\frac{1}{4\,\pi^3}\,\frac{\hbar\,\omega}{P_\gamma/\omega}\,\frac{\omega}{\omega_\gamma}} = h_{\min} \qquad \text{レーザー干渉計の検出限界}} \tag{37.9}$$

を得る．例として

$$P_\gamma = 10\,\mathrm{W}\,, \quad \hbar\omega_\gamma = 3\,\mathrm{eV} \approx 5\times 10^{-19}\,\mathrm{J}\,, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 10^3\,\mathrm{s}^{-1} \qquad (37.10)$$

を代入してみよう．すると

$$h_{\min} \approx 2\times 10^{-21} \qquad (37.11)$$

を得る．これは理想的な検出器の検出限界であって，光子検出の効率（ほぼ 50%）も反射の際の損失もまだ考察していない．最大の光路程(37.4)は $N\,L = c/(2\,\nu)$ であり，したがって $\nu = 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$ に対して 150 km である．鏡の間の距離が $L$ =1 km であるとすると，これは 150 の反射回数になる．

(37.3)から見て，可能と思われる長さの変化 $L\,h$ は，レーザー光の波長 $\lambda_\gamma$ より桁はずれに小さい．干渉実験は，非常に多くの光子（$\langle N_\gamma\rangle \sim 3\times 10^{16}$）がコヒーレントに伝搬するからこそ可能である．

現在，世界には数多くの実験設備があり，数年内には重力波放射の検証がなされると期待されている．これらの実験計画のなかでも，ドイツの計画 GEO 600 や LIGO や VIRGO，TAMA 300 が注目されている．

くわしい情報と現在の状況を知るには，ウェブサイト[11]でこれらの計画を調べることを勧める．

## 共鳴検出器

ウェーバー(J. Weber)は 1960 年頃から重力波の検証のために非常に高感度な装置を組み立てており，1970 年からはこれによる計測を行っている．この計測器はアルミの円柱で，そのパラメターは大きさ $L$（長さと直径），質量 $m$，固有振動数 $\omega_0$（基本振動），減衰係数 $\gamma$ であり，温度 $T$ で操作する．それらは数値的には

$$L \approx 1\,\mathrm{m}, \quad m \approx 10^3\,\mathrm{kg}, \quad \omega_0 \approx 10^4\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \gamma \approx 0.15\,\mathrm{s}^{-1}, \quad T \approx 300\,\mathrm{K} \qquad (37.12)$$

[11] http:www.geo600.uni-hannover.de, http://www.ligo.caltech.edu, http://www.virgo.infn.it and http://tamago.mtk.nao.ac.jp. 最新の（EURO 計画の）計測装置を知るには http://www.astro.cf.ac.uk/geo/euro を参照されたし．

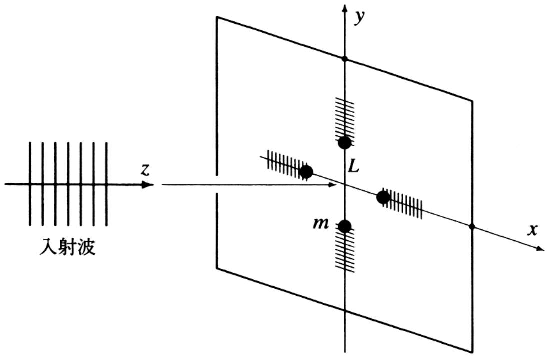



**図 37.1**: 重力放射のアンテナとして $x-y$ 面に四つの質量 $m$ から成る調和振動子を考える．中心から重心までの距離は $L$ とする．$z$ 方向に進む重力波は強制的に振動を励起する．

である．入射した重力波は円柱の固有振動を励起することができる．この振動は交流に変換され，増幅され，記録される．ここで，このようなウェーバー検出器がどのような入射エネルギー流束を共鳴的に検出できるか評価してみよう．モデルとして四つの共鳴的に結合された質量（図 37.1）を考える．これらに，入射重力波によって振動が励起される．

分極 $e_{11}=h$, $e_{12}=0$ の波に対して自由粒子の中心への距離 $\rho$ は，(33.12) によって次のように与えられる．

$$\rho = L\,(1 - h\,\cos(2\varphi)\,\cos(\omega t)) \tag{37.13}$$

したがって，質量の物理的な変位 $\xi_{\rm free}$ は座標 $(x,\,y)=(L,\,0)$ で

$$\xi_{\rm free} = \rho - L = -L\,h\,\cos(\omega t) = {\rm Re}\,\{-L\,h\,\exp({\rm i}\,\omega t)\} \tag{37.14}$$

である．図 37.1 の別の質量は同じ寄与を受け，(37.13) に従う位相でずれる．この変位は，波が粒子に及ぼす力 $K_{\rm GW}$ に対応する．よって

$$K_{\rm GW} = m\,\ddot{\xi}_{\rm free} = {\rm Re}\left\{m\,L\,h\,\omega^2\,\exp({\rm i}\,\omega t)\right\} \tag{37.15}$$

この力 $K_{\rm GW}$ は，波の特性（すなわち計量）と粒子の質量 $m$ とから決まる．それは粒子が自由であるか結合しているかにはかかわらない．よって，弾性

的に結びついている質量の運動方程式に $K_{\mathrm{GW}}$ を使うことができる.

$$m\left(\ddot{\xi}+\gamma\dot{\xi}+\omega_0^2\,\xi\right)=K_{\mathrm{GW}} \tag{37.16}$$

ここで $\xi$ は, 図 37.1 にある調和的結合質量の変動である. 微分方程式(37.16)は力学でよく知られている減衰調和振動子の運動方程式である. 力 $K_{\mathrm{GW}}$ のために振幅

$$\xi=\mathrm{Re}\left\{\frac{L\,h\,\omega^2\exp(\mathrm{i}\,\omega\,t)}{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\,\gamma\,\omega}\right\} \tag{37.17}$$

の強制振動が励起される. これを自由粒子の変動と比べてみる.

$$\left|\frac{\xi}{\xi_{\mathrm{free}}}\right|\approx\left|\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\,\gamma\,\omega}\right| \tag{37.18}$$

$\omega_0=\gamma=0$ であるとこの比は 1 である. この極限はまた十分に高い振動数 ($\omega\gg\omega_0$) に対しても成り立つ. $\omega\ll\omega_0$ の場合は, 変動は自由粒子より小さい, $\xi\ll\xi_{\mathrm{free}}$. これらに対して共鳴の場合, $\omega=\omega_0$ は増幅係数 $\omega_0/\gamma$ が生じる, すなわち

$$|\,\xi(\omega_0)\,|\approx\frac{\omega_0}{\gamma}\,|\,\xi_{\mathrm{free}}\,|\gg|\,\xi_{\mathrm{free}}\,| \tag{37.19}$$

(37.12) に対しては増幅係数はほぼ 5 桁の寄与をする. しかしこのためには, アンテナは固定振動数の送信者 (たとえばパルサー) に周波数を合わせなければならない. よって検出器は, 狭い周波数領域 $\omega=\omega_0\pm\gamma$ にだけ感度が高い.

円柱の強制振動が感知されるには, 振動は熱雑音より大きくなければならない. 円柱の基準振動は他の多くの (ほぼ $10^{29}$ 個の) モードと結合するが, その結合は弱く, これは振幅 $\xi$ のブラウン運動になる. このゆらぎの部分を $\xi_{\mathrm{fluct}}$ と記述する. このゆらぎの符号はランダムで, したがって平均は $\langle\xi_{\mathrm{fluct}}\rangle=0$ である. $\xi=0$ から $\xi=\xi_{\mathrm{fluct}}$ への強制変動の時間間隔 $\delta t=\pi/(2\,\omega_0)$ に対して, このゆらぎを拡散方程式で記述できる. ゆらぎの幅 $\Delta\xi$ に対して, $(\Delta\xi)^2=2\,D\,\delta t$ が成り立つ. 拡散係数 $D$ は, 減衰係数 $\gamma$ を使ってアインシュタイン関係式 $\gamma\,D=k_{\mathrm{B}}\,T/m$ から導くことができる.

$$(\,\Delta\xi\,)^2=2\,D\,\delta\,t=\frac{\pi\,k_{\mathrm{B}}\,T}{m\,\gamma\,\omega_0} \tag{37.20}$$

$T=0$ のとき，ゆらぎは消える．今ゆらぎを振動周期 $n_{\rm osc}$ にわたって平均する．大数の定理から，ゆらぎの（1 周期当たりの）相対的な幅 $\langle \xi^2_{\rm fluct} \rangle$ に対して

$$\langle \xi^2_{\rm fluct} \rangle \approx \frac{(\Delta\xi)^2}{n_{\rm osc}}, \qquad n_{\rm osc} = \frac{\omega_0 \tau}{2\pi} \tag{37.21}$$

が成り立つ．検知のためには，信号はゆらぎより大きくなければならない．

$$|\xi(\omega_0)|^2 \geq \langle \xi^2_{\rm fluct} \rangle \tag{37.22}$$

ここで $\xi(\omega_0) \propto h$ を代入し，その際(37.14)と(37.19)とを考慮すると

$$\boxed{h \geq \sqrt{\frac{\pi k_{\rm B} T}{m\omega_0^2 L^2}\frac{\gamma}{\omega_0}\frac{2\pi}{\omega_0\tau}} = h_{\rm min}(\tau) \qquad \text{共鳴検出器の検出限界}} \tag{37.23}$$

を得る．すなわち，熱的ゆらぎの影響は計測時間 $\tau$ を長く取ると減らすことができる．(37.12)を使い，4 ヶ月の計測時間 $\tau$ に対して

$$h_{\rm min} \approx 10^{-22} \qquad (\tau = 4\text{ ヶ月}) \tag{37.24}$$

を得る．これは単色波の波源に対する理想的な検出器の検出限界である．現実の検出器については，まだ考察しなければならない他の効果（たとえば円柱の振動を調べるセンサーとの結合）がある．

ここで議論している手法の検出器はまた，広がったスペクトルをもつ源にも反応する．この場合は明らかに $h_{\rm min}$ は大きくなる．というのは，熱雑音は(37.21)のように長時間の観測時間で抑えられなくなる．

ウェーバーの最初の検出器は $h_{\rm min} \approx 10^{-15}$ であった．現在の検出器は（$T$ =1 K で）ほぼ $h_{\rm min} = 10^{-18}$ である．計画中の検出器では，50 mK の温度で $h_{\rm min} = 10^{-20}$ に達する．

固定周波数 $\omega_0 = 10^4\ {\rm s}^{-1}$ の放射源としてよく知られているのは今問題としているパルサーだけである．この星からの波の振幅 $h$ は，ウェーバーの最初の検出器の検出限界（$h_{\rm min} = 10^{-15}$）より何桁も小さいと考えられていたが，ウェーバーは 1975 年信号を検出した．しかし他の実験グループは，この結果を追認することはできないでいる．

この検出器の配置の変化は(37.23)の数値係数を変えるが，他の量への依存性は変えない．あるパルサーへ同調させる際には，前もって $\omega_0$ を設定する．$\omega_0$ はその検出器の基準振動であるから，これによって検出器の諸量（$m$ や $L$）が大まかに決まる．これに対して，原則的に変えることができる要素は温度 $T$ と減衰係数 $\gamma$ である．$h_{\rm min}$ はそれらに

$$h_{\rm min} \propto \sqrt{\gamma T} \tag{37.25}$$

のように依存する．水晶（$\gamma \approx 10^{-6}\ {\rm s}^{-1}$）を使った低温($T = 3 \times 10^{-3}$ K)共鳴器では，原理的には(37.12)のパラメターをもつ検出器に対して $h_{\rm min}$ をほぼ5桁下げることができる．このような数値を実現するには相当な工学的挑戦が求められる．

一連のプロジェクト，なかでも ALLEGRO そして NIOBE, AURIGA, EXPLORER－NAUTILUS は，重力放射用共鳴検出器の改良に努力している．くわしい情報とそれぞれの現状についてはこれらのプロジェクトのウェブサイト[12]を参照することを勧める．

将来の検出器では，円柱の振動は（ここで与えられた古典的な取扱いとは違って）量子力学的に取り扱われなければならない．振幅 $h_{\rm qm}$ を計算してみよう．これに対しては，誘導された振動エネルギー $m\,\omega_0^2\,L^2\,h^2$ がエネルギー量子 $\hbar\omega_0$ と同じ程度になるということから

$$h_{\rm qm} \approx \sqrt{\frac{\hbar\,\omega_0}{m\,\omega_0^2\,L^2}} \approx 3 \times 10^{-21} \tag{37.26}$$

が得られる．数値は(37.12)を使って出した．上の式は $T$ と $\gamma$ に無関係であるが，(37.25)によってこの二つの量は感度を上げるためには決定的なものである．よって感度を高めようとすると，必然的に円柱の振動を量子力学的に取り扱わなければならない領域に入ってくる．

[12] http://gravity.phys.lsu.edu, http://www.gravity.pd.uwa.edu.au, http://www.auriga.lnl.infn.it and http://www.romal.infn.it/rog

## 演習

37.1: 連星系 i Boo の重力放射の影響で月－地球の距離はどれほど長さが変化するか？　重力波の波長は月－地球の距離と比べてどれほどの大きさか？

37.2: 図 37.1 に示されている重力波検出器を考える．振幅 $h$ と振動数 $\omega$ の重力波に対してこの配置で吸収されるパワー $P_{\rm absorb}(h,\omega)$ を計算せよ．これからウェーバー検出器の**断面積** $\sigma$

$$\sigma(\omega)=\frac{P_{\rm absorb}(h,\omega)}{\Phi_{\rm GW}(h,\omega)} \tag{37.27}$$

を計算せよ．共鳴断面積 $\sigma(\omega_0)$ と幾何学的断面積 $\sigma_{\rm geom}$ とを比較せよ．

# VIII　星の静的モデル

## Ⅷ章からⅩ章に関する前置き

重力は星と宇宙の静力学と動力学にとって中心となる相互作用である．一般相対論にとって強い重力場をもつ特定の星や宇宙はとりわけ興味のある対象である．Ⅷ章–Ⅹ章では重力理論をこの領域へ導入する．

天体物理学と宇宙論は，この60年間における三つの突出した発見に強い刺激を受けている．それらは

1. **クエーサー(準星)**：この準星的電波源は，60年前に光学的に認識できる天体として分類された．1963年，シュミット(Maarten Schmidt)は彼の測定した放射スペクトルを大きな宇宙赤方偏移で説明した．これからこの天体の距離が導かれるが，その距離が示唆するものは莫大な放射損失である．クエーサーのモデルとして考えられるものは，銀河の中心にある大きなブラックホール（48節）である．
2. **宇宙背景放射**：この放射は1965年，ペンジアス(Penzias)とウィルソン(Wilson)によって発見された．この理論的に予測されていた背景放射は，われわれの宇宙の初期に由来する(54節)．これは温度$T \approx 2.7$ K のプランクの放射分布のことである．
3. **パルサー**：これらの星は1967年，ヒューイッシュ(Hewish)とバーネル(Burnell)によって発見された．中性子星としての彼らの説明（43節）は，すでに1930年代に考え出されていたのであるが，確かなものとし

て受け入れられた．それによると，パルサーはほぼ3倍のシュワルツシルト半径の星である．

宇宙論は推論だけの学問であるというのがそれまでの評判であったが，2番目の発見はこの評判を覆した．この発見によって天文学と宇宙論への興味が深められ，広範な実験的かつ理論的な進歩がもたらされた．そしてクエーサーとパルサーは多数の新しい観測事実を生み出した．これらに関しては，重力レンズ（双子のクエーサー，26節）と連星系 PSR 1923+16（36節）からの重力放射がその例である．理論的に特に重要なのは，ブラックホールと宇宙の始まりに関する認識である．新しい理論の多くはここで想定している枠を超えて展開され，部分的には古典的な場の理論である一般相対論をはみ出している（たとえば量子効果などのように）．さてVIII章とIX章，X章では，一般相対論を使って得られる星や宇宙に関する種々の古典的な成果を議論する．星に関する成果は，重力の圧力に関する相対論的方程式と，ブラックホールにいたる崩壊の筋書きが特筆される．宇宙に関するその成果は，宇宙モデルと標準的宇宙モデルである．

1990年代に入ると，新しい観測が宇宙に関するわれわれの知識に本質的な進歩をもたらした．すなわち，

1. 新しい大きな望遠鏡，特に**ハッブル宇宙望遠鏡**（Hubble-Space-Telescope）を使った Type Ia に属する超新星の解析は，宇宙の大きさを以前よりもっと高い精度で定めた．この結果は，現在の宇宙の膨張速度が増加しているということを推測させる．
2. 気球観測**ブーメラン**(Boomerang)と**マキシマ**-1 (Maxima-1)は，宇宙背景放射の非等方性を非常な精密さで定めた．これらのデータの解析は，宇宙空間の曲がりがゼロかあるいは非常に小さいということを推測させる．

X章では，宇宙の質量の広範囲な運動をアインシュタインの場の方程式に基づいて議論する．それに関連した前述の種々の観測実験は，今現在の宇宙の状態に関するわれわれのイメージを非常に明確にしてくれる（53節）．

星の静的モデルに関するこのVIII章は，熱力学と量子力学の知識を前提とす

る．非相対論的重力場をもつ星を詳細に取り扱う 41-43 節は飛ばしてもよい．すなわち，38 節の概説は 41 節-43 節を十分にカバーしている．それでも 43 節の終わりにあるパルサーについての記述は短いけれども読んでおくべきである．

# 38　星の平衡

われわれは星を重力で結びついている巨大な物質の塊と考えている．重力は星をさらに圧縮する傾向がある．物質の圧力と重力の圧力が釣り合うとき平衡状態となる．すなわち

$$P_{\mathrm{grav}} = P_{\mathrm{mat}} \qquad \text{星の平衡} \tag{38.1}$$

われわれはある与えられた質量分布に対する重力圧力を定め，そしていくつかのタイプの星（太陽，白色矮星，中性子星）に対する物質圧力を決める．そしてこれらの星の大きさを見積もり，白色矮星に対する限界質量を与える．

(38.1)の最初の応用として地球表面を考える．そこでは，重力は圧力 $P_{\mathrm{grav}} \approx$ 1 バール(bar)をもたらす．これは大気の重さによって引き起こされる．この圧力は気圧 $P_{\mathrm{mat}} \approx \varrho k_{\mathrm{B}} T/m$ が $P_{\mathrm{grav}}$ に等しくなるまで空気を圧縮する．気圧としてここでは理想気体則を使っている．

条件(38.1)はすべての天体に対して成り立ち，各天体は固有の重力によって形を成し，これは惑星に対しても同じである．星は狭い意味で天体であり，少なくともほぼ太陽質量をもっている，$M \gtrsim M_{\odot}$．星の進化の道筋で核燃焼にいたるにはこれだけの質量が必要である．

次に考える**星の平衡**は長期間保持される状態，あるいは**星の進化**の最終段階として定性的に理解できる．星は水素原子の雲から生まれ，重力の影響で収縮する．収縮の過程で重力エネルギーが解放され，星は加熱される．質量が十分大きければ，星の内部で圧力と温度が非常に高くなり核融合が起こる．その際，太陽内部の平衡と同じ平衡が星の内部に生じるが，物質の圧力はいわゆるプラズマのガス圧である．核融合はヘリウムを生じ，さらなる過程で鉄（安定な原子）にいたることもある．核燃焼後の可能な平衡状態の一つは白色矮星であり，この星では $P_{\mathrm{mat}}$ は電子のフェルミ(Fermi)圧力である．別の可能性の一つは中性子星であり，そこでは中性子のフェルミ圧力が重力圧力と平衡を保っている．

この節では，われわれは太陽と白色矮星，中性子星を非相対論的に取り扱い，その際オーダー1の因子は無視することにする．相対論的補正の大きさはそのつど見積もることにする．白色矮星と中性子星のもっと正確な取扱いは42節と43節でなされる．

## 圧力分布

星の平衡が成り立っているときの圧力をすべて $P$ で表示する．

$$P = P_{\text{grav}} = P_{\text{mat}} \tag{38.2}$$

一般的にこの圧力 $P(\boldsymbol{r}, t)$ は場所と時間に依存している．われわれは，**静的**で**球状**の圧力分布 $P(r)$ を非相対論的な場合に計算する．

オイラー方程式(7.2)から出発する．静的な場合，速度場は消える，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) \equiv 0$．よって(7.2)は $\nabla P = \boldsymbol{f}_0$ となる．質量要素 $dm$ に働く重力は $d\boldsymbol{F} = -\mathrm{d}m\, \nabla \Phi$ であり，$\Phi$ はニュートンの重力ポテンシャルである．$\varrho = dm/dV$ により応力密度 $\boldsymbol{f}_0 = d\boldsymbol{F}/dV = -\varrho \nabla \Phi$ を得，よって

$$\nabla P(\boldsymbol{r}) = -\varrho \nabla \Phi(\boldsymbol{r}) \tag{38.3}$$

となる．球対称性により $P = P(r)$ と $\Phi = \Phi(r)$ が成り立ち

$$\frac{dP}{dr} = -\varrho \frac{d\Phi}{dr} \tag{38.4}$$

となる．ニュートンの場の方程式

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} r^2 \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \varrho \tag{38.5}$$

を1回積分すると，

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r dr'\, r'^2 \varrho(r') = \frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2} \tag{38.6}$$

を得る．よって(38.4)は

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2}\,\varrho(r)} \tag{38.7}$$

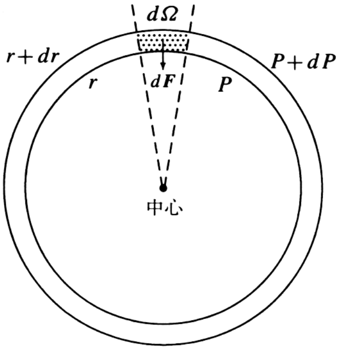



**図 38.1**: 陰影がつけられた場所の質量要素 $dm = \varrho r^2\,dr\,d\Omega$ に重力 $d\boldsymbol{F} = -(G\mathcal{M}/r^2)\,dm\,\boldsymbol{e}_r$ が働く．他方，圧力勾配が力 $d\boldsymbol{F}' = -dP\,r^2\,d\Omega\,\boldsymbol{e}_r$ を生ずる．力が釣り合うためには，$d\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{F}'$ でなければならない．これから(38.7)が出る．

となる．ここで

$$\mathcal{M}(r) = 4\,\pi \int_0^r dr'\,r'^2\,\varrho(r') \tag{38.8}$$

は $r' \le r$ の範囲にある質量を表す．図 38.1 に式(38.7)の別の導出法が簡潔に示されている．

方程式(38.7)は圧力を定め，この圧力は与えられた質量分布に重力による力を及ぼす（すなわち $P_{\rm grav}$）．また星のモデルを確定するには**状態方程式**$P = P(\varrho)$ を仮定しなければならない．これは，たとえば $P$ =const. であり，または $P = \varrho\,k_{\rm B}\,T/m$ である．これが $P_{\rm mat}$ となる．(38.2)のために(38.7)においても，状態方程式においても圧力に対して $P$ を使う．

とりあえず(38.7)を評価するために非圧縮性物質を仮定する，すなわち

$$\varrho(r) = \varrho_0 = \text{const.} \qquad (r \le R) \tag{38.9}$$

ここで $R$ は星の表面までの距離を表す[1]．(38.7)と(38.9)とから

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\,\pi}{3}\,G\,\varrho_0^2\,r \tag{38.10}$$

$$P(r) = P_0 - \frac{2\,\pi}{3}\,G\,\varrho_0^2\,r^2 \tag{38.11}$$

[1] VIII章とIX章では記号 $R$ はつねに星の表面までの距離に対して使われ，スカラー曲率には使われない．

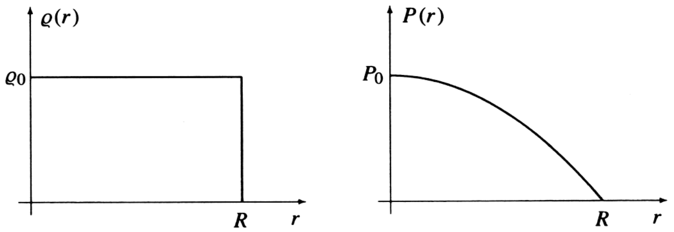



**図 38.2**: 一定の質量密度 $\varrho(r) = \varrho_0$（左側）は右に示した圧力分布を与える．

が出る．ここで $P_0 = P(0)$ は星の中心の圧力である．$r > R$ には物質は存在しないので，星の表面では重力圧力はゼロである，$P(R) = 0$．これより

$$P_0 = \frac{2\,\pi}{3}\,G\,\varrho_0^2\,R^2 = \varrho_0\,c^2\,\frac{r_S}{4\,R} \tag{38.12}$$

が得られる．ここで $r_S = 2\,G\,M/c^2$ はシュワルツシルト半径である．この結果は図 38.2 に示してある．

オーダーを見積もるために，非一様密度に対しても (38.12) を使用することにする．すなわち

$$\frac{r_s}{4\,R} \sim \frac{P}{\varrho\,c^2} \qquad \text{(星の平衡)} \tag{38.13}$$

となる．ここで $\varrho$ は平均の密度であり，$P$ は平均の圧力である．右辺にもちろん星のタイプに従った状態方程式 $P = P(\varrho)$ を代入してよい．すると星の質量と半径の間の関係を得る．比 $r_S/R$ はまた，相対論的効果の強さに対する尺度にもなる．

## 太陽

太陽を‘標準的な’星の例として考えてみる．このような星では，熱運動の運動論的圧力は重力圧力と平衡を保つ．この圧力に理想気体則を使うと

$$P = \frac{\varrho\,k_B\,T}{m} \tag{38.14}$$

である．ここで $T$ は温度，そして $k_B$ はボルツマン定数，$m$ は気体の質量である．(38.13) と (38.14) とから

$$\frac{r_{\mathrm{S}}}{4\,R} \sim \frac{P}{\varrho\,c^2} = \frac{k_{\mathrm{B}}\,T}{m\,c^2} \tag{38.15}$$

が得られる．太陽は主として原子核質量

$$m\,c^2 \approx 1\,\mathrm{GeV} \tag{38.16}$$

をもつ水素からできている．太陽内部の温度は進行している核反応によって決まり，次を与える．

$$k_{\mathrm{B}}\,T \sim \mathrm{k\,eV} \tag{38.17}$$

この温度で水素原子は十分に電離する．電子と陽子はその粒子密度 $N/V$ は双方等しいから，圧力 $P = N\,k_{\mathrm{B}}\,T/V$ に等しく寄与する．これに反して電子の質量密度への寄与は無視できるので，(38.15)では陽子質量のみが代入される．(38.15)-(38.17)から

$$\frac{r_{\mathrm{S}}}{4\,R} \sim \frac{k_{\mathrm{B}}\,T}{m\,c^2} \sim 10^{-6} \qquad (\text{標準的な星}) \tag{38.18}$$

を得る．これは星の表面の重力場の絶対強度を与える．

$M = M_{\odot}$ に対して $r_{\mathrm{S},\odot} = 3\,\mathrm{km}$ である．よって(38.18)から星の半径

$$R \approx 2.5 \times 10^5\,r_{\mathrm{S}} = 750\,000\,\mathrm{km} \tag{38.19}$$

を得る．これは太陽の実際の半径 $R_{\odot} \approx 700\,000$ km とほぼ等しい．$r_{\mathrm{s}} \ll R$ であるから，この段階の星の進化に対しては重力の相対論的効果は重要ではない．

## 白色矮星

太陽タイプの星では，まず水素が燃焼してヘリウムになる．星の内部で温度と圧力が適切（これは星の質量に依存する）であれば，ヘリウム → 炭素のような連鎖融合反応が引きつづき起こりうる．これは，結合エネルギーが最大である鉄にまでいたることがある．核融合過程が終結した後は，星は放射によって冷える．低温（以下では簡単のために $T \approx 0$ を考える）では，原子は中性原子（たとえばヘリウムや鉄の原子）になっていると思うかもしれ

ない．しかし実際は，原子の殻は重力には耐えられない（地球はそうではないが）．原子はむしろ重力圧力で押しつぶされる．このようにして電子ガスが生成され，重力はその**フェルミ圧力**に対抗している．その際，原子核は正のバックグラウンド電荷を形成するのであって，電気的な力は本質的な役割は果たさない．電子圧力が重力圧力と釣り合うような型の星は**白色矮星**と呼ばれる．ここでわれわれは，ヘリウムからできている星の平衡を初等的な方法で議論する．もっと厳密な取扱いは 42 節で行う．

電子はフェルミ粒子（1/2 のスピン）であり，したがって**パウリ原理**に従う．すなわち，一つの状態は最高 1 個の電子だけが占めることができる．体積 $V$ そして $N$ 個の電子からなる星に対しては，このことはどの電子も実効的に体積 $V/N$ を自由に占めてよいことを意味している．しかしこのような体積には限界があり，それが不確定性関係によって平均の電子運動量

$$p \sim \frac{\hbar}{(V/N)^{1/3}} \tag{38.20}$$

を生じさせる．この運動量は，熱運動が圧力(38.14)を生み出すように運動論的圧力を生じさせる．しかし，(38.20)に基づく運動論的圧力は $T \approx 0$ の場合も存在するが，それはフェルミ粒子を考えていることに基づいている．白色矮星で重力と釣り合っているのはこのフェルミ圧力である．

最小エネルギーの条件から星の平衡を定めることにするが，これは(38.1)の圧力平衡に等しい．運動量 $p$ をもつ電子のエネルギーは $\varepsilon = (m_e^2 c^4 + c^2 p^2)^{1/2}$ である．われわれは，相対論的な場合と非相対論的な場合とを区別する．すなわち

$$\varepsilon \approx \begin{cases} m_\mathrm{e}\, c^2 + \dfrac{p^2}{2\, m_\mathrm{e}} + \cdots & (p \ll m_\mathrm{e}\, c) \\ c\, p + \cdots & (p \gg m_\mathrm{e}\, c) \end{cases} \tag{38.21}$$

静止エネルギー $m_\mathrm{e}\, c^2$ は星の半径には依存しないので，以下の議論には何の役割も果たさない．よって，$N$ 個の電子のフェルミ運動の運動エネルギーは

$$E_\mathrm{mat} \approx \begin{cases} N\, \dfrac{p^2}{2\, m_\mathrm{e}} \sim \dfrac{N^{5/3}\, \hbar^2 / m_\mathrm{e}}{R^2} & (p \ll m_\mathrm{e}\, c) \\ N\, c\, p \sim \dfrac{N^{4/3}\, \hbar\, c}{R} & (p \gg m_\mathrm{e}\, c) \end{cases} \tag{38.22}$$

である．ここで(38.20)を使ったので，星の半径 $R = (3V/4\pi)^{1/3}$ が入ってきた．さらに数値係数は省略された．このエネルギーを符号 “mat” を付けて表す．というのは，このエネルギーは物質圧力 $P_{\rm mat}$ に強く関連しているからである．

(38.22)によって，電子の運動論的エネルギー $E_{\rm mat}$ は半径が減るにつれて増大する．よってそのエネルギーは星の収縮に抵抗する．重力エネルギー $E_{\rm grav}$ はオーダー 1 のファクターまで

$$E_{\rm grav} \approx -\frac{G\,M^2}{R} \tag{38.23}$$

で正しく与えられる．重力は星を収縮させようとする．

$N$ 個の電子それぞれに質量 $m_{\rm n}$ の 2 個の核子が対応して存在する[2)]．よって星の質量 $M$ は

$$M \approx 2\,N\,m_{\rm n} \tag{38.24}$$

である．星の安定な平衡に対する必要条件は，星のエネルギー $E(R)$ が半径 $R$ の関数として最小値を取ることである．すなわち

$$E(R) = E_{\rm grav}(R) + E_{\rm mat}(R) = \text{最小値} \tag{38.25}$$

この条件の議論のために，われわれは電子の運動に対して非相対論的な極限と相対論的な極限とを区別して考える．

1. 電子の運動量が非相対論的であるとする．すると引力 $E_{\rm grav} \propto -1/R$ と反発力 $E_{\rm mat} \propto +1/R^2$ とが図 38.3 に描かれているような最小値を与える．結果の平衡は**白色矮星**のそれである．
2. 質量 $M$ が増大するにつれて図 38.3 の最小値は小さい半径 $R$ のほうへずれる．よって十分に重い星に対しては，電子の運動量(38.20)は必然的に相対論的になる．(逆も成り立って，軽い質量に対しては非相対論的近似が正当化される)．$p \gg m_{\rm e}\,c$ に対しては，反発エネルギー $N^{4/3}\,\hbar c/R$ だけが引力エネルギー $-G\,M^2/R$ と対抗する．崩壊しない

---

[2)] 訳注：1 個の陽子と平均 1 個の中性子．

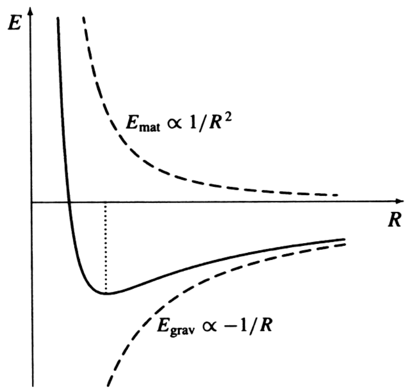



**図 38.3**: 非相対論的電子をもつ白色矮星のエネルギー $E = E_{\rm mat} + E_{\rm grav}$ の半径 $R$ 依存性.

ためには反発力が勝っていなければならない．すなわち

$$N^{4/3}\,\hbar c > G\,M^2 \qquad \text{または} \qquad M < m_{\rm n}\left(\frac{\hbar c}{G\,m_{\rm n}^2}\right)^{3/2} \tag{38.26}$$

評価をしやすくするために(38.24)を使って $N$ を消し，さらに数値係数を無視した．この結果は，限界質量

$$\boxed{M_{\rm C} = m_{\rm n}\left(\frac{\hbar c}{G\,m_{\rm n}^2}\right)^{3/2} \approx 1.8\,M_\odot \quad \text{チャンドラセカール限界}} \tag{38.27}$$

以下に対してだけ白色矮星の平衡が可能であるということを意味している．さもなければ，フェルミ圧力は収縮を押しとどめることはできない．この質量 $M_{\rm C}$ が有名な**チャンドラセカール(Chandrasekhar)限界**[3]である．ここで $\hbar c/G\,m_{\rm n}^2 \sim 10^{40}$ は強い相互作用と重力相互作用の比である．星の質量 $M_{\rm C}$ がミクロな物理学の自然定数 $(\hbar, m_{\rm n})$ と重力定数 $G$ から定められるということは注目すべきことである．数値係数をきちんと考慮すると，$M_{\rm C} \approx 1.2 \ldots 1.3\,M_\odot$ となる（42 節）．

[3] チャンドラセカールは量子統計と特殊相対論を使ったこの計算を 1930 年に発表した．しかし彼の結果が認められるまで 20 年以上もかかった．1983 年，（73 歳の）彼はこの仕事に対してノーベル賞を与えられた．

白色矮星は太陽質量程度の質量をもつ．

$$M \sim M_\odot \qquad (\text{白色矮星}) \tag{38.28}$$

もっと軽い質量の星では核融合の点火には到らないので，この星はヘリウムまたは鉄から白色矮星には進化しない．白色矮星よりもっと大きな質量の星は安定ではない．(38.28) は限界質量 (38.27) に近いので，電子の運動量は相対論領域の境界にある，すなわち $p \sim m_\mathrm{e}\, c$．これから電子当たりの体積は

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \overset{(38.20)}{\sim} \frac{\hbar}{p} \sim \frac{\hbar}{m_\mathrm{e}\, c} = 4 \times 10^{-13}\,\mathrm{m} \qquad (p \sim m_\mathrm{e}\, c) \tag{38.29}$$

と見積もられる．二つの電子間の平均距離は，このようにほぼ電子のコンプトン波長 $\hbar/m_\mathrm{e}\, c$ に等しい．電子当たりにほぼ二つの核子が存在する．これから質量密度 $\varrho_\mathrm{c}$ を得，これは白色矮星を特徴づける次の量になる．

$$\varrho_\mathrm{c} \approx 2\, m_\mathrm{n} \frac{N}{V} \sim \frac{m_\mathrm{n}}{(\hbar/m_\mathrm{e}\, c)^3} = 3 \times 10^{10}\, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad (\text{白色矮星}) \tag{38.30}$$

数値係数を考慮するとやや小さい値 $\varrho_\mathrm{c} \approx 2 \times 10^9\ \mathrm{kg/m^3}$ を得る（42 節）．白色矮星のこの密度は $1\ \mathrm{cm}^3$ 当たり 1 トンの大きさになる．

さて，相対論的効果の大きさを見積もることにする．これに対しては (38.13) を使うため，比 $P/\varrho\, c^2$ が必要である．圧力に対しては $P \sim E_\mathrm{mat}/V$ である．電子の運動量は相対論的領域にあるので $p \sim m_\mathrm{e}\, c$ であり，さらに $E_\mathrm{mat} \sim N\, m_\mathrm{e}\, c^2$ である．$\varrho \sim \varrho_\mathrm{c} \sim (N/V)\, m_\mathrm{n}$ を使って

$$\frac{r_\mathrm{S}}{R} \sim \frac{P}{\varrho\, c^2} \sim \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{n}} \approx \frac{1}{2\,000} \qquad (\text{白色矮星}) \tag{38.31}$$

を得る．よって重力場の絶対強度は 1 より小さい[4]．非常に相対論的なフェルミ運動を電子がしている可能性もあるが，重力場はよい近似で非相対論的に扱われる．太陽質量をもつ白色矮星は，したがって半径

$$R \sim 2\,000\, r_\mathrm{S} = 6\,000\,\mathrm{km} \approx 10^{-2}\, R_\odot \tag{38.32}$$

である．白色矮星は太陽表面とよく似た温度をもってよいので“白色”に見える．しかし $R \approx 10^{-2}\, R_\odot$ であるので，太陽に比べると $10^{-4}$ だけ少ない光を放射する．

[4] 訳注：$r_\mathrm{S}/R = 2GM/c^2 R = 2\Phi(R)/c^2$．(11.30)，(11.31) も見よ．

## 中性子星

$M > M_{\rm C}$ である星，たとえば $M \sim 10\,M_{\odot}$ であるような星を考えよう．このような星では，核融合による燃焼が終わると熱による圧力が下がる．そして収縮が始まり，それにつれて電子の運動量は相対論的になる．電子の運動エネルギー $(m_{\rm e}^2\,c^4 + c^2\,p^2)^{1/2} - m_{\rm e}\,c^2$ がほぼ $1.5\,m_{\rm e}\,c^2$ を越えると，反応

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \to \mathrm{n} + \nu_{\rm e} \tag{38.33}$$

が激しく起こるようになる．電子と陽子は同じ数だけあるので，中性子への完全な変換が可能である．よって，中性子からできている星の平衡状態を考えることにする．

白色矮星で電子に対して行ったように，もっとも単純な近似として中性子を理想フェルミガスとして取り扱う．星の平衡は中性子のフェルミ圧力と重力圧力の釣り合いからもたらされる．結果は白色矮星に対するものと同じ形になる．すなわち，単に電子質量 $m_{\rm e}$ が，これまでの計算で核子の質量，あるいは中性子の質量 $m_{\rm n}$ と置き換えられる．よって特徴的な密度(38.30)は

$$\varrho_{\rm c} \sim \frac{m_{\rm n}}{(\hbar/m_{\rm n}\,c)^3} \sim 10^{20}\,\frac{\rm kg}{\rm m^3} \qquad (\text{中性子星}) \tag{38.34}$$

となる．数値係数を考慮するとやや小さい値 $\varrho_{\rm c} \approx 6 \times 10^{18}\,{\rm kg/m^3}$ になる（43節）．この密度は原子核の密度に対応する．われわれは，中性子星を大きな電気的に中性の原子核と想い描いてもよい．

白色矮星の場合と同じ根拠で一つの限界質量 $M_{\rm C}$ が出る．この**オッペンハイマー(Oppenheimer)ーボルコフ(Volkoff)限界**は，チャンドラセカール限界と同じオーダーの大きさである．なぜなら，(38.27)は電子の質量に依存していないからである．ある重い星，たとえば $M \sim 10\,M_{\odot}$ の星を取り上げる．電子のフェルミ圧力と重力との釣り合いが(38.33)によって破綻すると，劇的な重力崩壊が生じる．そして最終的に，大部分の質量が爆発的にはじき飛ばされる（超新星，47節）．その際，崩壊の中心部に $M < M_{\rm C}$ をもつ中性子星が取り残される．1054年の有名な超新星の中心に，このような中性子星が観測される．

(38.31) と同様な見積もりは

$$\frac{r_S}{R} \sim \frac{P}{\varrho c^2} \sim 1 \qquad \text{(中性子星)} \tag{38.35}$$

を与える．$M \sim M_\odot$ をもつ中性子星は実際にほぼ 10 km の半径をもち，よって $r_S/R \approx 0.3$ が成り立つ．中性子星は**パルサー**として観測されるが，それは 43 節で詳細に考察される．

## クォーク星

白色矮星は，高い圧力のもとで星の原子が押しつぶされるときに（電子と原子核のスープになって）生じる．これと同じように，中性子星の中性子は押しつぶされて“クォークのスープ”になるであろう．結果の**クォーク星**は中性子星よりも幾分小型になり，12 km ではなくて 8 km の直径をもつであろう．

さて，クォークのフェルミ圧力が重力圧力と釣り合っているという単純な描像に戻ることにする．二つの中性子は，それらが同じスピン（たとえば上向きのスピン）をもっているときは同じ場所を占めることはできない．二つのクォークはスピンや性質（アップ，ダウン，奇妙さ，など)，色が一致しているときは同じ場所を占めることはできない．色は追加された自由度であって，（勝手に）赤，緑，青と呼ぶ三つの値を取ることができる．追加された自由度（性質と色）を使うとクォークを細分化することができる．

クォーク星の可能性は 1980 年代すでに推測されていた．そして 2002 年春，クォーク星の存在を推測させるような最初の観測が報告された．

## まとめ

これまでに議論された星（太陽，白色矮星，中性子星）に対してはそのつど**理想気体モデル**を応用した．これはまず，原子やイオンから成る理想気体であり，さらに電子あるいは中性子に対する理想フェルミガスである．この際，**理想**とは粒子間の相互作用を考えないことを意味する．これを使うと手始めとしての単純な星の平衡を記述することができる．

この節では**平衡**だけを考えてきた．これは時間に依存した星の進化に対して手がかりを与えてくれる．ここで普通に考えられている星の力学のイメージを手短にまとめてみる．$M \lesssim 0.1\,M_\odot$ の星は核燃焼には至らない．$M \sim 0.1\,M_\odot$ の星は収縮によって暖まり弱く光る．惑星の木星は，この**褐色矮星**の部類に入る．$M \gtrsim M_\odot$ の星では，1 回またはそれ以上の核融合サイクルが起こる．$M \sim M_\odot$ の星はその後白色矮星となる．十分な大きさの質量をもつ星は核融合燃焼の果てに重力崩壊する．$M \sim 10\,M_\odot$ に対しては中心に中性子星が残ることが予想され，$M \sim 30\,M_\odot$ およびそれ以上の質量の星に対してはブラックホール（48 節）が予測される．

次節では，等方で静的な質量分布に対するアインシュタインの場の方程式が解かれる．これは内部シュワルツシルト計量を与え，かつ方程式(38.7)を相対論的に一般化した式を与える．その後，ここでは単にオーダーのみを評価した星の平衡をもっとくわしく計算する．そしてⅨ章では，単純化された仮定のもとに星の重力崩壊を取り扱う．

## 演習

38.1: 地球の内部の圧力プロファイル $P(r)$ を計算せよ．そのために密度 $\rho_0$ の非圧縮性流体として地球を考えよ．地球の中心の圧力 $P_0$ を示せ．

地球の平均密度： $\rho_0 \approx 5.5 \times 10^3$ kg/m$^3$，半径 $R_{\rm E} \approx 6.4 \times 10^3$ km.

重力加速度： $g = G\,M_{\rm E}/R_{\rm E}^2 \approx 10$ m/s$^2$.

# 39 シュワルツシルトの内部解

ここではアインシュタインの場の方程式を球形で静的な星の内部において解く.

23 節で次の表式

$$d s^2 = B(r)\, c^2 dt^2 - A(r)\, dr^2 - C(r)\, r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \qquad (39.1)$$

は静的かつ球状の場合の計量に対する表式になりうることを示した. 24 節では, この表式を使って源のない場の方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ を解いた. そしてこれがシュワルツシルト計量となった. この節では同じ表式を使って場の方程式

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\, g_{\mu\nu}\right) \qquad (39.2)$$

を解く. この際, $T_{\mu\nu}$ は球状かつ静的な星の質量分布を記述することになる. この解は**シュワルツシルトの内部解**と呼ばれる.

星の物質として完全流体を考える. するとそれは圧力 $P$ と質量密度 $\varrho$, 速度場 $u_\mu(x)$ で記述される. エネルギー運動量テンソルは(20.29)で与えられる. すなわち

$$T_{\mu\nu} = \left(\varrho + P/c^2\right) u_\mu u_\nu - P\, g_{\mu\nu} \qquad (39.3)$$

保存則(20.31)

$$T^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0 \qquad (39.4)$$

は重力場中の流体に対する相対論的オイラー方程式であり, また連続の方程式である. 求める解を得るためにこの方程式を使うかどうかは, 目的とするものに合っているどうかの問題である.

オイラー方程式は一般相対論の場の方程式からもちろん得られるが, ニュートンの場の方程式

$$\Delta \varPhi = 4\pi G \rho \qquad (39.5)$$

からは得られないということに留意すべきである. よってニュートン極限では, オイラー方程式を付け加えなければならない. 静的かつ球状の問題に対

しては $\boldsymbol{v}=0$ が成り立ち，オイラー方程式(7.2)は

$$\nabla P(r) = -\varrho \nabla \Phi \tag{39.6}$$

となる．(39.5)と(39.6)とから密度と圧力の間の関係式(38.7)が出る．エネルギー運動量テンソル(39.3)に**静的**でかつ**球状**という仮定を当てはめる．球状の系では，$P(r)$ と $\varrho(r)$ は半径座標 $r$ だけに依存する．静的な状態では速度の空間成分はゼロでなければならない．すなわち

$$u^i(x) = 0 \tag{39.7}$$

それで(20.6)から

$$c^2 = g_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu = g_{00}\left(u^0\right)^2 \tag{39.8}$$

が出て，その結果

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{B}} \qquad \text{そして} \qquad u_0 = c\sqrt{B} \tag{39.9}$$

となる．(39.7)と(39.9)とを使って(39.3)を書き直すと

$$(\,T_{\mu\nu}\,) = \mathrm{diag}\ \left(\varrho\, c^2\, B,\ P\, A,\ P\, r^2,\ P\, r^2 \sin^2\theta\right) \tag{39.10}$$

となる[5]．そして(39.1)から

$$(\,g^{\mu\nu}\,) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{B},\ -\frac{1}{A},\ -\frac{1}{r^2},\ -\frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\right) \tag{39.11}$$

が出る．これを使うとエネルギー運動量のトレースは

$$T = T^\lambda{}_\lambda = g^{\mu\nu}\, T_{\mu\nu} = \varrho\, c^2 - 3\,P \tag{39.12}$$

となる．場の方程式の右辺に(39.10)と(39.12)とを代入する．左辺の $R_{\mu\nu}$ はすでに(23.14)-(23.18)で計算されている．それによると，$\mu \neq \nu$ に対する場の方程式は自動的に満たされている．さらに $(\mu,\nu)=(3,3)$ と $(\mu,\nu)=(2,2)$

---

[5] 訳注：$C(r)=1$ ととってある．(23.2) → (23.3)の変形とその際の訳注を見よ．

とに対する場の方程式は係数が異なっているだけである．よって，次の三つの方程式を解かなければならない．

$$R_{00} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA} = -\frac{4\pi G}{c^4}\,\left(\varrho\, c^2 + 3\,P\right)\,B \tag{39.13}$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} = -\frac{4\pi G}{c^4}\,\left(\varrho\, c^2 - P\right)\,A \tag{39.14}$$

$$R_{22} = -1 - \frac{r}{2A}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} = -\frac{4\pi G}{c^4}\,\left(\varrho\, c^2 - P\right)\,r^2 \tag{39.15}$$

これから

$$\frac{R_{00}}{2\,B} + \frac{R_{11}}{2\,A} + \frac{R_{22}}{r^2} = -\frac{A'}{r\,A^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2\,A} = -\frac{8\pi G}{c^2}\,\varrho \tag{39.16}$$

を得る．$r^2$ を掛けると

$$\frac{d}{dr}\,\frac{r}{A(r)} = 1 - \frac{8\pi G}{c^2}\,\varrho\, r^2 \tag{39.17}$$

となる．この表式をゼロから $r$ まで積分する．このとき $(r/A)_{r=0} = 0$ を使う．というのは，(39.1)から $A$ は連続的な質量分布に対しては $r = 0$ で有限でなければならないからである．結果は

$$A(r) = \left[1 - \frac{2\,G\,\mathcal{M}(r)}{c^2\,r}\right]^{-1} \tag{39.18}$$

となるが，ここで

$$\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r dr'\, {r'}^2\, \varrho(r') \tag{39.19}$$

である．(17.5)の助けを借りて ${T^{\mu\nu}}_{\|\nu} = 0$ を

$$\begin{aligned} {T^{\mu\nu}}_{\|\nu} &= {T^{\mu\nu}}_{|\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda}\,T^{\lambda\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\,T^{\lambda\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{|g|}\,T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\,T^{\lambda\nu} = 0 \end{aligned} \tag{39.20}$$

と表す．$\mu = 1$ と置き，(39.3)の $T^{\mu\nu}$ を使うと

$$\begin{aligned} {T^{1\nu}}_{\|\nu} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\,(\varrho + P/c^2)u^1 u^\nu\right)_{|\nu} + \Gamma^{1}_{\nu\lambda}\,(\varrho + P/c^2)u^\nu u^\lambda - \left(P\,g^{1\nu}\right)_{\|\nu} \\ &= \Gamma^{1}_{00}\,\left(\varrho + \frac{P}{c^2}\right)u^0 u^0 - P_{|\nu}\,g^{1\nu} = \frac{B'}{2A}\left(\varrho + \frac{P}{c^2}\right)\frac{c^2}{B} + \frac{P'}{A} = 0 \end{aligned} \tag{39.21}$$

となる．2 番目の列に対してはまず $(u^\mu) = (u^0, 0, 0, 0)$ と $P_{\|\nu} = P_{|\nu}$，${g^{1\nu}}_{\|\nu} = 0$ を使った．次に最終の段階で(39.9)と

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{g^{11}}{2}\,\frac{\partial\, g_{00}}{\partial\, x^1} = \frac{B'}{2A} \tag{39.22}$$

を代入した．よって(39.21)は

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2\,P'}{\varrho\, c^2 + P} \tag{39.23}$$

となる．$B \approx 1 + 2\Phi/c^2$ と $P \ll \varrho\, c^2$ に対しては，これは(39.6)に帰着する．

(39.16)と(39.18)とから

$$-\frac{A'}{A^2} = \frac{2\,G\,\mathcal{M}}{c^2\, r^2} - \frac{8\,\pi\, G\,\varrho\, r}{c^2} \tag{39.24}$$

を得る．これと(39.23)，(39.18)とを(39.15)に代入すると

オッペンハイマー－ボルコフ方程式：

$$\frac{d\,P}{d\,r} = -\frac{G\,\mathcal{M}\,\varrho}{r^2}\left[1 + \frac{P}{\varrho\, c^2}\right]\left[1 + \frac{4\,\pi\, r^3\, P}{\mathcal{M}\, c^2}\right]\left[1 - \frac{2\,G\,\mathcal{M}}{c^2\, r}\right]^{-1} \tag{39.25}$$

を得る．この方程式は，1930 年代にトールマン(Tolman)とオッペンハイマー，ボルコフによって立てられ検討された．よってこの方程式は，トールマン－オッペンハイマー －ボルコフ方程式とも呼ばれる．非相対論の場合には，$P/(\varrho\, c^2) \ll 1$ と $G\,\mathcal{M}/(r\, c^2) \ll 1$，$r_{\mathrm{S}}/R \ll 1$ が成り立つ．よって角括弧がなくなり，再び(38.7)を得る．オッペンハイマー－ボルコフ方程式は，重力圧力に対する相対論的方程式である．

$B(r)$ を定めるために(39.25)を(39.23)に代入すると

$$\frac{B'}{B} = \frac{2\,G}{c^2\, r^2}\left[\mathcal{M} + \frac{4\,\pi\, r^3\, P}{c^2}\right]\left[1 - \frac{2\,G\,\mathcal{M}}{c^2\, r}\right]^{-1} \tag{39.26}$$

を得る．すると $\ln\, B(r)$ は右辺の積分に等しくなる．積分領域として $r$ と $\infty$ とを取る．$B(\infty) = 1$ であるから

$$B(r) = \exp\left\{-\frac{2\,G}{c^2}\int_r^\infty \frac{d\,r'}{r'^2}\,\frac{\mathcal{M}(r') + 4\,\pi\, r'^3\, P(r')/c^2}{1 - 2\,G\,\mathcal{M}(r')/(c^2\, r')}\right\} \tag{39.27}$$

となる．この解が質量分布の外部で，よく知られた（外部）シュワルツシルト解に移行することを確かめる．質量分布は $R$ の内側の領域に限定されているので

$$r > R: \qquad \varrho = P = 0 \quad そして \quad \mathcal{M}(r) = \mathcal{M}(R) = M \tag{39.28}$$

である．よって(39.27)は

$$B(r) = \exp\left\{-\frac{2G}{c^2}\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2}\,M\left[1-\frac{2GM}{c^2 r'}\right]^{-1}\right\} \qquad (r > R) \tag{39.29}$$

となる．$x = 1 - 2GM/(c^2 r)$ と置くと

$$B(r) = \exp\left\{\int_1^x \frac{dx'}{x'}\right\} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \qquad (r > R) \tag{39.30}$$

となる．$A(r)$ に対しては(39.18)から

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right]^{-1} \qquad (r > R) \tag{39.31}$$

となる．このように $r \geq R$ に対しては，(39.18)と(39.27)とは外部シュワルツシルト計量に帰着する．24 節の導出では未知の積分定数 $M$ が出てきて，その物理的な意味はニュートン極限と比べることで得られた．それに対して，ここでは $M$ は質量密度 $\rho$ の積分として定義されている，(39.19)．

## 星の平衡

オッペンハイマー－ボルコフ方程式は相対論的重力圧力に対する微分方程式であり，次の形をしている．

$$P'(r) = P'\,(\,P(r),\,\varrho(r),\,\mathcal{M}(r)) \qquad (重力圧力) \tag{39.32}$$

ここで(39.19)によって

$$\mathcal{M}'(r) = 4\pi r^2\,\varrho(r) \qquad (\mathcal{M}\ の定義) \tag{39.33}$$

である．(39.32)と(39.33)とで，われわれは三つの場，$P$ と $\varrho$，$\mathcal{M}$ に対して二つの微分方程式をもっている．すべての場を定めるためには，なおもう一つの表式が必要である．それは**状態方程式**であり，物質の内部圧力を質量密度の関数として与える．

$$P(r) = P(\varrho(r)) \qquad \text{(物質圧力)} \tag{39.34}$$

今や(39.32)–(39.34)は，三つの未知の場，$P$ と $\varrho$，$\mathcal{M}$ に対する三つの方程式を構成する．ここでわれわれは，重力圧力 $P_{\text{grav}}$，(39.32)，と物質の内部圧力 $P_{\text{mat}}$，(39.34)とを両方とも $P$ で表しているが，これは $P = P_{\text{grav}} = P_{\text{mat}}$ を内々に仮定しているからである．

これ以降，われわれは簡単な形の状態方程式

$$P = K\,\varrho^{\gamma} \qquad \text{(ポリトロープ状態方程式)} \tag{39.35}$$

を用いることにする．ここで $K$ と $\gamma$ とは定数である．このような依存性の例は，非相対論的および相対論的な場合における縮退したフェルミガスのフェルミ圧力である．

一般的に星の温度 $T$ は無視できない．(熱的)状態方程式 $P = P(\varrho(r), T(r))$ は温度場 $T(r)$ に依存しており，さらにもう一つの場の関係式が必要である．これが熱状態方程式 $E = E(\varrho(r), T(r))$ であり，これは質量密度のエネルギー $E$ と温度とを結びつける．

今の単純化された範囲で，方程式系(39.32)–(39.34)は相対性理論における星の平衡を定める．これから $\varrho(r)$ と $P(r)$ とが計算されるし，(39.18)と(39.27)とを使えばまた $A(r)$ と $B(r)$ とが計算できる．この $A$ と $B$ とをもった計量(39.1)が**内部シュワルツシルト計量**である．

## 演習

39.1: 太陽を回る地球の軌道は半径 $r$ の円軌道であるとする．太陽（半径 $R_{\odot}$，シュワルツシルト半径 $r_{\mathrm{S}}$）の重力場は内部と外部シュワルツシルト計量で記述される．太陽の密度は一様であるとする．地球軌道の円周と直径の比を計算せよ．

# 40 相対論的な星

相対論的な星というのは，重力場が非常に強くて相対論的な効果が顕著になるような星であると考える．非圧縮性の物質の場合に，オッペンハイマー－ボルコフ方程式を解いてシュワルツシルトの内部解の係数を定める．われわれは，相対論的な星の重力崩壊に対する安定性や赤方偏移，質量欠陥を調べる．

一様密度 $\varrho_0$ の球状の星を考える．

$$\varrho(r) = \begin{cases} \varrho_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \tag{40.1}$$

この想定は，密度は圧力に依存しない，すなわち，物質は非圧縮性であることを意味する．これはポリトロープ状態方程式(39.35)において，極限 $\gamma \to \infty$ に対応する[6]．

(39.19)から $\mathcal{M}$ を計算すると

$$\mathcal{M}(r) = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3}\,\varrho_0\, r^3 = M\,\dfrac{r^3}{R^3} & (r \leq R) \\ \dfrac{4\pi}{3}\,\varrho_0\, R^3 = M & (r \geq R) \end{cases} \tag{40.2}$$

を得る．質量 $M$ は計量と重力場を漸近的に定める．よって $M$ はまた，**重力質量**あるいは簡単に星の質量と呼ばれる．

(40.1)と(40.2)とをオッペンハイマー－ボルコフ方程式に代入する．領域 $r \leq R$ で

$$\frac{P'}{(P+\varrho_0\, c^2)(P+\varrho_0\, c^2/3)} = -\frac{4\pi\, G\, r}{c^4}\left[1-\frac{8\pi\, G\,\varrho_0\, r^2}{3\,c^2}\right]^{-1} \tag{40.3}$$

を得る．ここで無次元の半径 $x=\sqrt{8\pi\, G\,\varrho_0/3\,c^2}\; r$ を導入すると

$$\frac{-2\,\varrho_0\, c^2\, d\,P}{(P+\varrho_0\, c^2)(3\,P+\varrho_0\, c^2)} = \frac{x\,d\,x}{1-x^2} \tag{40.4}$$

---

[6] 訳注：(39.35)は $\varrho \propto P^{1/\gamma}$ とも書ける．これより $\gamma \to \infty$ で $\varrho \to \mathrm{const.}$.

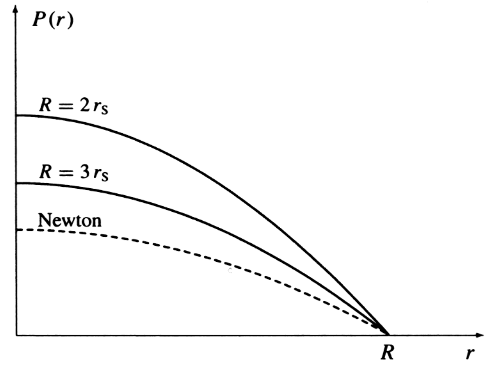



**図 40.1**: $R = 3\,r_S$ と $R = 2\,r_S$ に対する一定質量密度の場合の相対論的圧力プロファイル $P(r)$．ニュートン的圧力（破線）が両方に対して同じプロファイルを与えるように目盛りが取られている．$R \to (9/8)\,r_S$ に対しては相対論効果は発散を与える．

となる．この方程式の積分は

$$\ln\left(\frac{P+\varrho_0\,c^2}{3\,P+\varrho_0\,c^2}\right) = -\frac{1}{2}\,\ln\,\left(1-x^2\right) + \text{const.} \tag{40.5}$$

となる．積分領域として $r$ と $P(R)=0$ となる星の表面までの距離 $R$ を代入すると

$$\frac{P(r)+\varrho_0\,c^2}{3\,P(r)+\varrho_0\,c^2} = \left[\frac{1-8\,\pi\,G\,\varrho_0\,R^2/3\,c^2}{1-8\,\pi\,G\,\varrho_0\,r^2/3\,c^2}\right]^{1/2} \qquad (r \le R) \tag{40.6}$$

となる．$4\,\pi\,G\,\varrho_0\,R^3/3\,c^2 = G\,M/c^2 = r_S/2$ でシュワルツシルト半径を導入し，$P(r)$ について解くと

$$P\,(r) = \varrho_0\,c^2\,\frac{\sqrt{1-\dfrac{r_S\,r^2}{R^3}}-\sqrt{1-\dfrac{r_S}{R}}}{3\sqrt{1-\dfrac{r_S}{R}}-\sqrt{1-\dfrac{r_S\,r^2}{R^3}}} \qquad (r \le R) \tag{40.7}$$

を得る．$r \ge R$ に対して $P(r)=0$ となる．圧力 $P(r)$ は図 40.1 に $R = 3\,r_S$ と $R = 2\,r_S$ に対して示されており，非相対論的極限と比較されている．

$A(r)$ と $B(r)$ を与える．(39.18) と (40.2) から

$$A(r) = \begin{cases} \left[1 - \dfrac{r_S\, r^2}{R^3}\right]^{-1} & (r \le R) \\ \left[1 - \dfrac{r_S}{r}\right]^{-1} & (r \ge R) \end{cases} \tag{40.8}$$

となる．(39.27) と (40.2)，(40.7) とから

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left[3\sqrt{1 - \dfrac{r_S}{R}} - \sqrt{1 - \dfrac{r_S\, r^2}{R^3}}\,\right]^2 & (r \le R) \\ 1 - \dfrac{r_S}{r} & (r \ge R) \end{cases} \tag{40.9}$$

が出る．

## 安定性

星の半径 $R$ がシュワルツシルト半径に近づくと相対論効果が顕著になる (図 40.1)．(40.7) から

$$\boxed{P_0 = P(0) = \varrho_0\, c^2 \, \frac{1 - \sqrt{1 - \dfrac{r_S}{R}}}{3\sqrt{1 - \dfrac{r_S}{R}} - 1} \qquad \text{中心圧力}} \tag{40.10}$$

が出る．星の中心で重力圧力は最大になる．この中心圧力 $P_0$ は，小型で十分に重い星に対して発散する．

$$P_0 \xrightarrow{R \to (9/8)\, r_S} \infty \tag{40.11}$$

中心の重力圧力が発散するときは，いかなる（$P_{\rm grav} = P_{\rm mat}$ のような）平衡も成り立たない．$P_0 \to \infty$ に対しては，どのような実在の物質も崩壊する．よって星の平衡はただ

$$\boxed{R \;>\; \frac{9}{8}\, r_S \qquad \text{安定性に対する条件}} \tag{40.12}$$

に対してだけ可能である．この安定条件は，与えられた星の半径 $R$ に対しては質量の上限を意味し，与えられた質量 $M$ に対しては半径の下限を意味す

る．(40.12)の数値係数は，特定の状態方程式には依存しないということを示すことができる（[文献 1] の 11.6 節）．(40.12)が満たされているかぎり，計量係数(40.8)と(40.9)とはどこにも特異なところはない．

非相対論の場合でかつ非圧縮性の物質に対しては，最大圧力 $P_0$，(38.12)はつねに有限である．しかしこの場合でも，物質の圧縮性（圧力）が大きすぎると不安定性が生じうる．これは，たとえば白色矮星に対して質量の上限を与える．

これに反して $R \to (9/8)\, r_{\rm S}$ に対する不安定性は本質的なことである．これは物質の高すぎる圧縮性によって引き起こされるのではなく，むしろオッペンハイマー－ボルコフ方程式に内在する相対論効果によるものである．高い圧力（$P \geq \varrho c^2$）に対しては，(39.25)は $dP/dr \propto -P^2$ となり，よって中心で圧力の自己増幅を引き起こす．結果の発散(40.11)は星を形成している物質の性質には依存しない．

よって一般相対論の場の方程式は，$R \to (9/8)\, r_{\rm S}$ に対して星の中心の重力圧力が発散するという結果を導く．問題は，このような星が**重力崩壊**をこうむるかということである．崩壊自身は動力学的な過程であり，したがって時間に依存した計量を必要とする．47 節で非常に簡単な条件のもとで崩壊を調べる．

## 赤方偏移

星の表面から放射される光の赤方偏移を定める．(12.9)によって赤方偏移は

$$z = \frac{\nu_{\rm A}}{\nu_{\rm B}} - 1 = \sqrt{\frac{g_{00}(\boldsymbol{r}_{\rm B})}{g_{00}(\boldsymbol{r}_{\rm A})}} - 1 \qquad (40.13)$$

である．ここで $A$ は放射の場所，すなわち星の表面 $r = R$ である．そこでは(40.9)によって $g_{00}(\boldsymbol{r}_{\rm A}) = B(R) = 1 - r_{\rm S}/R$ が成り立つ．光は $g_{00}(\boldsymbol{r}_{\rm B}) = 1$ となる場所 $B$ で受信される．これは星から無限に離れた場所，あるいは近似的に地球でも成り立つ．よって星の光の赤方偏移は

$$\boxed{z = \frac{1}{\sqrt{1 - r_{\rm S}/R}} - 1 \qquad \text{星の光の赤方偏移}} \qquad (40.14)$$

に等しい．(40.12)によって赤方偏移の値は

$$z < 2 \qquad (\text{星の光}) \tag{40.15}$$

に制限される．もっと大きな赤方偏移は，十分に透明な星の内部からの放射に対して生じる可能性があり，また崩壊した星（すなわちブラックホール）の領域 $r \gtrsim r_{\mathrm{S}}$ からの放射光に対しても可能性がある．観測された大きな（$z \lesssim 5$ までの）赤方偏移は準星に由来する．しかし，それは宇宙赤方偏移（50 節）に原因があり，ここでのように重力赤方偏移に基づくものではない．

## 質量欠損

星の外側の場に使われる重力質量 $M$ は(40.2)によって

$$M = 4\pi \int_0^\infty dr'\, r'^2 \varrho(r') \stackrel{(40.1)}{=} \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho_0 \tag{40.16}$$

で与えられる．われわれはこれを，質量を構成しているそれぞれの部分の和，すなわち構成質量 $M_{\mathrm{k}}$

$$M_{\mathrm{k}} = \sum_i \Delta m_i = \int dV\, \varrho \stackrel{(40.1)}{=} V \varrho_0 \tag{40.17}$$

と比較したい．計量(39.1)によって $V \neq (4\pi/3)\, R^3$ であり，したがって $M_{\mathrm{k}} \neq M$ である．二つの質量の差は重力結合エネルギーに基づく質量欠陥である．

$$\Delta M = M_{\mathrm{k}} - M = -E_{\mathrm{grav}}/c^2 > 0 \tag{40.18}$$

重力を除いては長距離相互作用は存在しない．すなわち，すべての他の相互作用の寄与は $\Delta m$ に含まれており，これから質量密度 $\Delta m/\Delta V$ が定まる．しかし重力は $\Delta m$ には寄与しない（十分に小さな体積 $\Delta V$ を仮定する）．したがって，質量 $M_{\mathrm{k}}$ は重力を考慮**しない**総質量となる．よって，質量欠損は負の重力結合エネルギーに等しい[7]．

[7] 訳注：次のように考えてもよい．$M$ は $M = M_k + M_G$ と書ける．$M_k$ は星を構成している全バリオンの静止質量と熱エネルギー，圧力などの和である．$M_G$ は重力ポテンシャルエネルギーであり，これを $\Delta M$ と書くと(40.18)になる．ニュートン極限ではこれは目に見える形でポテンシャルに比例した量(40.25)になる．より詳しい議論については［文献 3］参照．

シュワルツシルト計量の星の体積 $V$ を(40.8)を使って計算する．

$$V = \int_{r\le R} dV = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{|\,g_{11}\,g_{22}\,g_{33}\,|}$$

$$= 4\pi \int_0^R \frac{r^2\,dr}{\sqrt{1-r^2\,r_{\rm S}/R^3}} = 4\pi\,R_{\rm S}^3 \int_0^X \frac{dx\,x^2}{\sqrt{1-x^2}} \tag{40.19}$$

ここで半径

$$R_{\rm S} = R\sqrt{\frac{R}{r_{\rm S}}} \tag{40.20}$$

と無次元の量

$$x = \frac{r}{R_{\rm S}} = \sqrt{\frac{r^2\,r_{\rm S}}{R^3}} \quad \text{そして} \quad X = \frac{R}{R_{\rm S}} = \sqrt{\frac{r_{\rm S}}{R}} \tag{40.21}$$

とを導入した．よって体積 $V$ は

$$V = 2\pi\,R_{\rm S}^3 \left(\arcsin\,X - X\sqrt{1-X^2}\right) = \frac{4\pi}{3}\,R^3\,F(X) \tag{40.22}$$

となる．今，関数 $F(X)$ を小さな $X$ と安定性限界の $X=\sqrt{9/8}$ に対して示すと

$$F(X) = \frac{3\,\left(\arcsin X - X\sqrt{1-X^2}\right)}{2\,X^3} = \begin{cases} 1+\dfrac{3}{10}\left(\dfrac{R}{R_{\rm S}}\right)^2 & (X \ll 1) \\ 1.64 & (X=\sqrt{8/9}) \end{cases} \tag{40.23}$$

となる．質量欠陥(48.18)はこの結果

$$\Delta M = M_{\rm k} - M = \varrho_0 \left(V - \frac{4\pi\,R^3}{3}\right) = M\,[F(X)-1] \tag{40.24}$$

となる．ニュートン極限（$X \ll 1$）では，これは

$$\Delta M\,c^2 = M\,c^2\,\frac{3}{10}\left(\frac{R}{R_{\rm S}}\right)^2 = \frac{3}{5}\,\frac{GM^2}{R} = -E_{\rm grav} \tag{40.25}$$

となる．類似の形は静電気学で一様に帯電した球に対して得られる．安定性限界では，質量欠損は質量それ自身と比較できるまでに大きくなる．

$$R = \frac{9}{8}\,r_{\rm S} \quad \text{に対して} \quad \frac{\Delta M}{M} = 0.64 \tag{40.26}$$

# 41 ニュートン的な星

ニュートン的な星というのは，重力場が弱くてニュートン極限で記述できるような星である．われわれはこの極限解をポリトロープ状態方程式に照らして議論する．結果は 42 節と 43 節とで白色矮星と中性子星に適用される．

オッペンハイマー－ボルコフ方程式の非相対論的極限は次の条件

$$\frac{P}{\varrho c^2} \ll 1, \qquad \frac{4\pi r^3 P}{\mathcal{M} c^2} \ll 1, \qquad \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r} \ll 1 \tag{41.1}$$

で得られる．この条件のもとで(39.25)は(38.7)に帰着する．(38.7)を $\mathcal{M}$ について解きなおし，それを $r$ について微分する．$\mathcal{M}' = 4\pi r^2 \varrho$ を使うと

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\varrho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G \varrho r^2 \tag{41.2}$$

を得る．ここでポリトロープ状態方程式

$$P = K \varrho^{\gamma} \tag{41.3}$$

を代入すると

$$\gamma K \frac{d}{dr}\left(r^2 \varrho^{\gamma-2}\frac{d\varrho}{dr}\right) = -4\pi G \varrho r^2 \tag{41.4}$$

となる．この微分方程式を解いて，$r=0$ で有限

$$\varrho(0) = \varrho_0 < \infty \tag{41.5}$$

になる解を探す．(41.4)から $r \to 0$ に対して

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varrho}{dr}\right) \propto r^2 \qquad \text{すなわち} \qquad \varrho'(r) \propto r \tag{41.6}$$

である．それで

$$\varrho'(0) = 0 \tag{41.7}$$

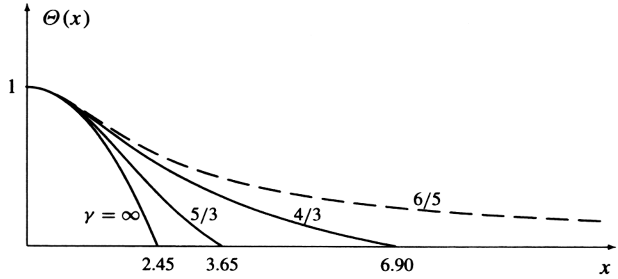



**図 41.1**: 指数 $n = 1/(\gamma - 1)$ についてのレイン－エムデン関数 $\Theta(x)$ は，密度 $\varrho \propto \Theta^n$ の半径 $r \propto x$ 依存性を定める．ゼロ点（$x$-軸とグラフの交点）は星の半径 $R$ を与える．$\gamma = \infty$ の場合（非圧縮性の星）と $\gamma = 5/3$（小さな白色矮星），$\gamma = 4/3$（大きな白色矮星，不安定性の限界），$\gamma = 6/5$（この値で交点がなくなる．破線で示してある）が示されている．

である．ここで無次元の半径 $x$

$$x = \left[\frac{4\pi G(\gamma - 1)}{K\gamma}\right]^{1/2} \varrho_0^{\,1-\gamma/2}\, r \tag{41.8}$$

と，同じく無次元の関数 $\Theta(x)$

$$\Theta(x) = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma-1} \tag{41.9}$$

を導入する．これらを使うと (41.4) は

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\Theta}{dx}\right) + \Theta^n = 0\,, \qquad n = \frac{1}{\gamma - 1} \tag{41.10}$$

となる．境界条件

$$\Theta(0) = 1\,, \qquad \Theta'(0) = 0 \tag{41.11}$$

はこの微分方程式の解を一義的に決める．解の関数 $\Theta(x)$ は，いわゆる指数 $n$ の**レイン**(Lane)**－エムデン**(Emden)関数である．$x \ll 1$ に対してレイン－エムデン関数の展開式は

$$\Theta(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{n}{120}x^4 - \frac{8n^2 - 5n}{15120}x^6 \pm \cdots \tag{41.12}$$

である．さらに次のような解析的な解が存在する．

$$\begin{aligned} n=0, \quad &\gamma=\infty \text{ に対して} \quad &\Theta &= 1-x^2/6 \\ n=1, \quad &\gamma=2 \text{ に対して} \quad &\Theta &= \sin(x)/x \\ n=5, \quad &\gamma=6/5 \text{ に対して} \quad &\Theta &= 1/\sqrt{1+x^2/3} \end{aligned} \tag{41.13}$$

図 41.1 に $\gamma=\infty$ と $\gamma=6/5$，そして中間値 $\gamma=5/3$ と $\gamma=4/3$ に対するレイン－エムデン関数のグラフが示してある．

$n<5$ あるいは $\gamma>6/5$ に対しては，レイン－エムデン関数は一つまたは複数のゼロ点をもつ．最初のゼロ点，$\Theta(x_1)=0$ では，密度はゼロである．この場所が星の半径を定める．

$$R=\left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{1/2} \varrho_0^{\gamma/2-1}\, x_1 \tag{41.14}$$

星の質量(40.16)は

$$M=4\pi\,\varrho_0^{(3\gamma-4)/2}\left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{3/2}\int_0^{x_1} dx\, x^2\,\Theta^n \tag{41.15}$$

となる．微分方程式(41.10)の助けを借りると，被積分関数は $-(x^2\,\Theta')'$ と書ける．このことに注意して積分を実行すると

$$M=4\pi\int_0^{\infty} dr\, r^2\varrho(r)=4\pi\,\varrho_0^{(3\gamma-4)/2}\left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{3/2} x_1^2\,|\Theta'(x_1)| \tag{41.16}$$

となる．決められた状態方程式に対しては，$K$ と $\gamma$（よって $x_1$ と $\Theta'(x_1)$）は決まった値をもっている．よって，半径 $R$ と質量 $M$ は中心密度 $\varrho_0$ だけの関数である．

$$M=\text{const.}\cdot\varrho_0^{(3\gamma-4)/2} \tag{41.17}$$

$$R=\text{const.}\cdot\varrho_0^{\gamma/2-1} \tag{41.18}$$

白色矮星と中性子星に対しては，指数は $\gamma=5/3$ と $\gamma=4/3$ である（42 節と 43 節を見よ）．非圧縮性の星は $\gamma=\infty$ で記述される．これらの場合の関数 $\Theta(x)$ は図 41.1 に示してある．縮尺の違いはあるが，$\Theta(x)$ は質量密度 $\varrho(r)$ を表している．

## 安定性

さて，ここで見いだされた平衡解はその安定性をまだ調べていない．これに関しては原則的に平衡解からのずれをすべて考え，どのずれに対しても復元力が存在するということを証明すべきであろう．ここではもっとも単純な議論によって，値 $\gamma = 4/3$ が安定と不安定の境界を定めるということを示す．考えている解は長さで特徴づけられ，これに対しては星の半径 $R$ がまず考えられる．平衡解からの可能なずれの一つは，すべての長さを同じ比率で伸ばしたり縮めたりすることである．考えている解に対しては，それは星の半径の変位 $\delta R = R - R_0$ を意味し，$R_0$ は平衡の値である．ここで重力エネルギー $E_{\rm grav}$ と内部エネルギー $E_{\rm mat}$ の $R$ 依存性を決める．係数 1 のオーダーを除いて

$$E_{\rm grav} \approx -\frac{GM^2}{R} \quad \text{と} \quad E_{\rm mat} \approx PV = K\varrho^\gamma V \propto \frac{1}{R^{3(\gamma-1)}} \tag{41.19}$$

が成り立つ．正の定数 $C_1$ と $C_2$ とを使うと，これから総エネルギー $E$ に対して

$$E(R) = E_{\rm grav} + E_{\rm mat} = -\frac{C_1}{R} + \frac{C_2}{R^{3(\gamma-1)}} \tag{41.20}$$

が出る．エネルギー $E$ は引き合う部分 $1/R$ と反発する部分 $1/R^{3(\gamma-1)}$ から成っている．この $R$ の関数は，図 38.3 の場合と類似していてわかりやすい．明らかに，$\gamma > 4/3$ に対してだけ最小値が存在する．限界値 $\gamma = 4/3$ それ自身に対しては詳細な検討が必要であるが，われわれは安定性の必要条件として

$$\gamma \geq \frac{4}{3} \qquad (\text{安定性の条件}) \tag{41.21}$$

を得る．しかしこの条件は十分条件ではない．というのは，平衡状態からの可能なたった**一つ**のずれのみを考えているからである．

白色矮星と中性子星の場合には，非相対論的考察では $\gamma = 5/3$ となり，それに対して相対論的極限では $\gamma = 4/3$ となる．$\gamma = 4/3$ に対しては，反発成分が引き合う成分より大きくなければならない，すなわち (41.20) で $C_2 > C_1$．この条件は質量の上限を与える．

# 42 白色矮星

電子フェルミ気体によって平衡な星“白色矮星”のモデルが作られる．この場合は，縮退したフェルミ気体の運動論的圧力が重力圧力と釣り合う．

核融合に使える燃料を使い果たすとその星は放射によって冷え，熱の圧力はもはや重力と釣り合うことができなくなる．このようにして始まる収縮は大きな質量の星の場合，原子の殻を押しつぶすことになる．（惑星のような小さな星の場合は，原子の殻は重力圧力に耐えることができる）．これは電子と原子核の“スープ”を作り出し，そしてこれは平均として（粒子間距離の数倍で平均すると）電気的に中性である．よって電磁力は星の平衡には寄与しない．電子は最低次の近似で互いの相互作用を無視した**理想フェルミガス**として取り扱われる．星の体積 $V$ は電子によって決まり，以下で述べるように電子はそこでは最低次の順位を占める．この電子の運動論的圧力は体積が減るにつれて増大する．これによって新たな平衡が生じうる．この平衡が**白色矮星**型の星のモデルである．

$T=0$ の電子フェルミガスを考える．これは**縮退した**フェルミガスと呼ばれる．体積 $V$ と電子の数 $N$ が与えられているものとする．体積要素 $d^3 r\, d^3 p$ をもつ位相空間には，正確に体積 $(2\pi\hbar)^3$ 当たり一つの状態がある．この状態は，（上向きスピンと下向きスピンの）2 個の電子で占めることができる．$T=0$ では電子は最低の状態，すなわち $|\boldsymbol{p}| \le p_{\mathrm{F}}$ であるすべての状態を占める．**フェルミ運動量**$p_{\mathrm{F}}$ 以下のすべての状態数を計算すると

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_V d^3 r \int_{p \le p_{\mathrm{F}}} d^3 p \sum_{\mathrm{spin}} 1 = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}\, \frac{4\pi}{3}\, {p_{\mathrm{F}}}^3 \tag{42.1}$$

となる．これは今考えているすべての電子の数 $N$ と等しくなければならない．これからフェルミ運動量 $p_{\mathrm{F}}$ と電子密度 $n_{\mathrm{e}} = N/V$ との次の関係が出る．

$$p_{\mathrm{F}} = \hbar \left(3\pi^2 n_{\mathrm{e}}\right)^{1/3} \tag{42.2}$$

運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ粒子の状態は，エネルギー

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \sqrt{m_{\mathrm{e}}^2 c^4 + p^2 c^2} \tag{42.3}$$

をもつ．ここで $p = |\boldsymbol{p}|$ であり，$m_\mathrm{e}$ は電子の質量である．電子ガスのエネルギーは

$$E_\mathrm{mat} = 2 \sum_{p \le p_\mathrm{F}} \varepsilon(\boldsymbol{p}) = \frac{2\,V}{(2\,\pi\,\hbar)^3} \int_0^{p_\mathrm{F}} d\,p\; 4\,\pi\,p^2\,\sqrt{m_\mathrm{e}^2\,c^4 + p^2\,c^2}$$
$$= \frac{m_\mathrm{e}^4\,c^5}{\pi^2\,\hbar^3}\,V \int_0^{x_\mathrm{F}} d\,x\; x^2 \sqrt{1+x^2} = \frac{m_\mathrm{e}^4\,c^5}{\pi^2\,\hbar^3}\,V\,f(x_\mathrm{F}) \tag{42.4}$$

である．上の式で無次元の運動量

$$x = \frac{p}{m_\mathrm{e}\,c}\,, \qquad x_\mathrm{F} = \frac{p_\mathrm{F}}{m_\mathrm{e}\,c} \tag{42.5}$$

と関数

$$f(x_\mathrm{F}) = \int_0^{x_\mathrm{F}} d\,x\; x^2 \sqrt{1+x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,{x_\mathrm{F}}^3 \left(1 + \dfrac{3}{10}{x_\mathrm{F}}^2 + \cdots\right) & (x_\mathrm{F} \ll 1) \\[2ex] \dfrac{1}{4}\,{x_\mathrm{F}}^4 \left(1 + \dfrac{1}{{x_\mathrm{F}}^2} + \cdots\right) & (x_\mathrm{F} \gg 1) \end{cases} \tag{42.6}$$

とを導入した．圧力 $P$ は熱力学の関係式 $d\,E = T\,d\,S - P\,d\,V$ から出る．縮退したフェルミガスに対しては $T = 0$ と $E = E_\mathrm{mat}$ とが成り立つので

$$P = P_\mathrm{mat} = -\frac{\partial\,E_\mathrm{mat}}{\partial\,V} = \frac{m_\mathrm{e}^4\,c^5}{\pi^2\,\hbar^3} \left(\frac{{x_\mathrm{F}}^3}{3}\sqrt{1+{x_\mathrm{F}}^2} - f(x_\mathrm{F})\right) \tag{42.7}$$

である．上の式では

$$\frac{d\,x_\mathrm{F}}{d\,V} = -\frac{x_\mathrm{F}}{3\,V} \tag{42.8}$$

が使われており，これは (42.2) が $x_\mathrm{F} \propto V^{-1/3}$ と書けることから出る．結果の圧力 (42.7) は縮退したフェルミガスのフェルミ圧力である．

(42.7) と (42.2) とで $P$ は電子密度 $n_\mathrm{e}$ と結びつけられる．さて質量密度

$$\varrho = \sigma\,n_\mathrm{e}\,m_\mathrm{n} \tag{42.9}$$

との関係を見よう．ここで $m_\mathrm{n}$ は核子の質量，$\sigma$ は電子当たり平均の核子の数である．質量密度への電子質量の寄与は無視できる．ヘリウムからできて

いる白色矮星では $\sigma = 2$ である．核融合サイクルが完全に終末まで進行したとすれば，最大の結合エネルギーをもつ $^{56}$Fe が作られる．これに対して

$$\sigma = \frac{A}{Z} = \frac{56}{26} \approx 2.15 \qquad (\text{鉄}) \tag{42.10}$$

である．(42.2) と (42.5)，(42.9) とから

$$x_{\mathrm{F}} = \frac{p_{\mathrm{F}}}{m_{\mathrm{e}}\, c} = \frac{\hbar}{m_{\mathrm{e}}\, c} \left( \frac{3\,\pi^2\, \varrho}{\sigma\, m_{\mathrm{n}}} \right)^{1/3} \tag{42.11}$$

が出る．白色矮星に対する典型的な値は $x_{\mathrm{F}} \sim 1$ であり，このことを以下で説明する．$x_{\mathrm{F}} = 1$ に対して特徴的な密度 $\varrho_{\mathrm{c}}$

$$\varrho_{\mathrm{c}} = \frac{\sigma\, m_{\mathrm{n}}}{3\,\pi^2\, \hbar^3}\, (m_{\mathrm{e}}\, c)^3 \tag{42.12}$$

を得る．$x_{\mathrm{F}} \propto \varrho^{1/3}$ であるから $x_{\mathrm{F}} \ll 1$ に対して $\varrho \ll \varrho_{\mathrm{c}}$ が成り立ち，$x_{\mathrm{F}} \gg 1$ に対して $\varrho \gg \varrho_{\mathrm{c}}$ が成り立つ．(42.7) と (42.6) と (42.11) とから

$$P = \frac{m_{\mathrm{e}}^4\, c^5}{\pi^2\, \hbar^3} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{15}\, x_{\mathrm{F}}^{\,5} \\[2ex] \dfrac{1}{12}\, x_{\mathrm{F}}^{\,4} \end{array} \right\} = \begin{cases} K_1\, \varrho^{5/3} & (\varrho \ll \varrho_{\mathrm{c}}) \\[1ex] K_2\, \varrho^{4/3} & (\varrho \gg \varrho_{\mathrm{c}}) \end{cases} \tag{42.13}$$

を得る．ここで

$$K_1 = \frac{\hbar^2}{15\,\pi^2\, m_{\mathrm{e}}} \left( \frac{3\,\pi^2}{\sigma\, m_{\mathrm{n}}} \right)^{5/3} \quad \text{そして} \quad K_2 = \frac{\hbar\, c}{12\,\pi^2} \left( \frac{3\,\pi^2}{\sigma\, m_{\mathrm{n}}} \right)^{4/3} \tag{42.14}$$

である．このように，二つのどの極限もポリトロープ状態方程式になる．(41.14) と (41.16) とを用い，その時々の $\gamma$ に対してよく知られた $x_1$ と $\Theta'(x_1)$ の数値を代入する．このようにして，質量と半径の中心密度 $\varrho_0$ 依存性を得る．すなわち

$$M = \begin{cases} \dfrac{2.79}{\sigma^2} \left( \dfrac{\varrho_0}{\varrho_{\mathrm{c}}} \right)^{1/2} M_{\odot} & (\varrho_0 \ll \varrho_{\mathrm{c}}) \\[2ex] \dfrac{5.87}{\sigma^2}\, M_{\odot} = M_{\mathrm{C}} & (\varrho_0 \gg \varrho_{\mathrm{c}}) \end{cases} \tag{42.15}$$

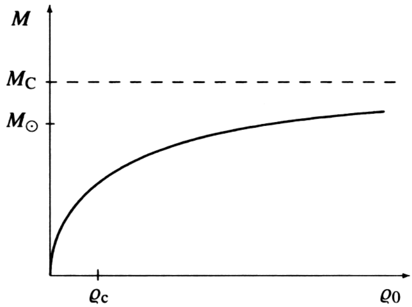



**図 42.1**: 中心密度 $\varrho_0$ の関数としての白色矮星の質量 $M$

と

$$R = \begin{cases} \dfrac{2.00}{\sigma}\left(\dfrac{\varrho_c}{\varrho_0}\right)^{1/6} 10^4\,\mathrm{km} & (\varrho_0 \ll \varrho_c) \\[2ex] \dfrac{5.33}{\sigma}\left(\dfrac{\varrho_c}{\varrho_0}\right)^{1/3} 10^4\,\mathrm{km} & (\varrho_0 \gg \varrho_c) \end{cases} \tag{42.16}$$

とを得る．$\varrho_0$ の関数として二つの極限の間の移り変わりは単調である，図 42.1 を見よ．

白色矮星の質量上限 $M_C$ は，1930 年にストーナー(Stoner)によって，そしてそれとは独立に 19 歳のチャンドラセカールによって導出された．それは今日**チャンドラセカールの質量限界**と呼ばれている．鉄から成る白色矮星に対して(42.15)から

$$M_C \overset{\sigma=2.15}{=} 1.27\,M_\odot \tag{42.17}$$

を得る．$M \to M_C$ に対して $\varrho_0 \gg \varrho_c$ が成り立ち，よってポリトロープ状態方程式(42.13)で $\gamma = 4/3$ である．(41.21)によると，この値は不安定性のしきい値である．$M \to M_C$ に対して $\varrho_0 \to \infty$ となり，よってまた $P_0 \to \infty$ となる．これは最終的に不安定になる．実際すでに限界質量 $M_C$ に近づくと反応 $\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \to \mathrm{n} + \nu_e$ が始まる．これは電子のフェルミ圧力の衰退につながり，星は崩壊する．

連星系では，白色矮星が質量を吸い込み $M_C$ に近づくことができる．そしてこの星の崩壊は超新星として観測される．

質量 $M \sim M_{\odot}$ は白色矮星に特徴的である．というのは，十分小さい質量の場合はその星は核融合燃焼に至らないし，もっと大きい質量は安定に存在するための上限を越えているために排除されてしまう．よって上の図に示されているように，$\varrho_{\rm c}$ は白色矮星に対する**特性密度**である．それは 1 cm$^3$ 当たりほぼ2トンの重さになる．

$$\boxed{\varrho_{\rm c} = \frac{\sigma\, m_{\rm n}}{3\,\pi^2\,\hbar^3}\,(m_{\rm e}\,c)^3 \approx 2\times 10^9\,\frac{\rm kg}{\rm m^3} \qquad \text{白色矮星の質量密度}} \tag{42.18}$$

ここで $\sigma$ に対しては(42.10)が使われた．$M \sim M_{\odot}$ の白色矮星は(42.16)から半径 $R \approx 10^4$ km をもっている．相対論的な効果の絶対強度は，よって

$$\boxed{\frac{2\,|\Phi|}{c^2} = \frac{2\,G\,M_{\odot}}{R\,c^2} = \frac{r_{\rm S,\odot}}{R} \approx 3\times 10^{-4} \qquad \text{白色矮星の重力場}} \tag{42.19}$$

に等しい．これはオッペンハイマー－ボルコフ方程式の非相対論的極限を使うことを正当化する．

経験的には，白色矮星はずいぶん前から知られている．プランクの放射法則の助けを借りると，光のスペクトル分布から観測された星の表面温度を推測することができる．白色矮星のスペクトルは白色あるいは青白色を呈している．よってその表面温度は，太陽($T_{\odot} \approx 6\,000$ K)の温度と同じくらいかあるいはもっと高い[8)]．白色矮星はほぼ同じ表面温度にもかかわらず，太陽の絶対光度のほんの数分の1の光度しかもたない．シュテファン(Stefan)－ボルツマン(Boltzmann)の法則によると，絶対放射パワー（絶対光度）$L$ は次のように放射面積と温度の4乗に比例する．

$$L = \text{ const.}\cdot R^2\,T^4 \tag{42.20}$$

これを $R$ について解きすべての量をそれぞれの太陽の量と対比させると

$$R = \left(\frac{T_{\odot}}{T}\right)^2 \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)^{1/2} R_{\odot} \tag{42.21}$$

---

8) これは縮退電子ガスに対して上でなされた仮定 $T \approx 0$ とは矛盾しない．フェルミガスに対してこの仮定は $k_{\rm B}\,T \ll \varepsilon_{\rm F}$ を意味する．$\varrho \sim \varrho_{\rm C}$ の密度に対しては $\varepsilon_{\rm F} \sim m_{\rm e}\,c^2$ が成り立ち，したがって $\varepsilon_{\rm F} \sim 0.5$ MeV であり，これに対して $k_{\rm B}\,T \sim$ eV である．

を得る．このようにして，星の半径は絶対光度 $L$ と（振動数分布による）温度 $T$ の計測から決められる．ある白色矮星に対する計測で，たとえば $L = 10^{-4}\,L_{\odot}$ と $T = T_{\odot}$ が得られたとしよう．これから $R = 10^{-2}\,R_{\odot} \approx 10^4$ km が出る．ここで導入したモデルは，このような半径をきちんと根拠づける．**白色**という呼び方は星の光の振動数分布に対応し，**矮星**という言い方はその大きさに対応している．考察された星の平衡に対しては，有限の温度は重要ではない．というのは，圧力へのその寄与は無視できるほど小さい．外部からの影響（たとえば物質の捕捉）がなければ，白色矮星は電磁波放射によってますます冷え，ついには黒色（すなわち目に見えない）矮星となる．

白色（あるいは黒色）矮星は，われわれの太陽の最終段階の一つである．しかしこの節の始めで考えたようには，白色矮星への（太陽のような）星の進化は単純なものではない．ここで，天文学で一般的に考えられている進化を簡単に述べることにする．星の中心領域での水素の燃焼の後，その燃焼はまずこの領域を包含する領域に進む．これは，本質的には水素でできている包含領域の加熱と膨張につながる．**赤色巨星**はこれから生じ，その中心領域は外からは見ることはできない．この包含領域は，最終的には中心から十分離れ，そして外へ飛び出し（今や再び見えるようになった）中心核が残る．この包含領域の飛出しはほぼ $2 \times 10^4$ 年という比較的短い時間の間起こる．（これに反して水素燃焼の段階は，星の質量に応じて $10^6$ から $10^{11}$ 年の間つづく）．そして残されている中心核が白色矮星となる．

# 43 中性子星，パルサー

$M \geq M_{\rm C}$ である星に対しては，核融合の終了後に起こる重力収縮を電子のフェルミ圧力で押しとどめることはできない．この場合には重力崩壊となり，中心にはたぶん中性子星が残ることになる．われわれはこのような中性子星の平衡状態を考える．中性子星はパルサーとして観測される．

中性子の発見(1932)の直後，ランダウ(Landau)は中性子で星ができる可能性があると述べた．その定量的な取扱いはオッペンハイマーとボルコフ(1939)によって行われ，彼らはまた質量上限も計算した．

さて，$\beta$ 崩壊では $\rm n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ によってエネルギー $\Delta E = (m_{\rm n} - m_{\rm p} - m_{\rm e})\, c^2 \,(= 1.52\, m_{\rm e}\, c^2)$ が解放される．強く圧縮された物質では，電子のフェルミ・エネルギーはこの値 $\Delta E \approx 1.5\, m_{\rm e}\, c^2$ を越えるので，フェルミ分布の上端の粒子に対しては逆の反応

$$\rm p + e^- \to n + \nu_e \tag{43.1}$$

が激しく促進される．電子のフェルミ・エネルギーは密度とともに増加する，(42.2)．星は電気的中性であるので陽子当たり 1 個の電子がある．よって十分に高密度の場合は，過程(43.1)が陽子を中性子に変換することになる．これによって，本質的に中性子から成る星，ほかならぬ**中性子星**が生成されうる．

このような中性子星の成立を想像してみよう．重たい星（$M \gg M_{\odot}$）のなかで（燃料が尽きたので）核融合燃焼が終結したとする．エネルギー生成の終結とともに温度が下がり，よって熱の圧力も下がる．そして電子のフェルミ圧力（それは $T = 0$ でも存在する）が $P_{\rm mat}$ の主要部分を占める．しかし質量が大きいので，フェルミ圧力は重力圧力をもちこたえることができない．星はますます圧縮される．密度の増大につれて最終的に星の内部で反応(43.1)が起こるようになる．これによってフェルミ圧力は減少し，星は崩壊する．重力崩壊は劇的で，動力学的な過程であり，そのモデル化は複雑である．$M \gtrsim 10\, M_{\odot}$ の星に対しては，崩壊の中心に中性子星が残るであろうと

推測される．簡単なモデルでこの中性子星の平衡状態の計算のみを行うことにする．

中性子星では，中性子のフェルミ圧力が重力と釣り合うことで平衡が成り立ちうる．非常に荒い近似として中性子間の強い相互作用を無視すると，白色矮星のモデルに類似した星のモデルを設定することができる．その際，白色矮星のモデルとは次の点で異なる．

1. 質量密度 $\varrho$ は考えているフェルミガスそれ自体である（それに比例しているのではない）．
2. フェルミガスが相対論的であるときは，それはまた重力場を相対論的にする（(43.10) を見よ）．

中性子星に対しては，前の節の表式で電子質量 $m_e$ は中性子質量 $m_n$ と置き換えられ，さらに (42.10) の代わりに $\sigma = 1$ が成り立つ．よって (42.12) の臨界密度 $\varrho_c$ は

$$\varrho_c = \frac{m_n^4\, c^3}{3\,\pi^2\,\hbar^3} \tag{43.2}$$

となる．粒子数 $N$ とフェルミ運動量との間の関係 (42.1) は変わらない．中性子ガスのエネルギーは (42.4) の類似で与えられる．

$$E_{\rm mat} = \frac{2\,V}{(2\,\pi\,\hbar)^3} \int_0^{p_F} dp\; 4\,\pi\, p^2 \sqrt{m_n^2\, c^4 + p^2\, c^2} = \frac{m_n^4\, c^5}{\pi^2\,\hbar^3}\, V\, f(x_F) \tag{43.3}$$

ここで $x_F = p_F / m_n\, c$ であり，$f(x)$ は (42.6) で定義された関数である．星の質量密度は中性子のエネルギー密度から与えられる．

$$\varrho = \frac{E_{\rm mat}}{c^2\, V} = 3\,\varrho_c\, f(x_F) \tag{43.4}$$

極限 $x_F \ll 1$ と $x_F \gg 1$ に対して，前の節のように $\gamma = 5/3$ あるいは $\gamma = 4/3$ をもつポリトロープ状態方程式 $P = -d\,E_{\rm mat}/dV = K\,\varrho^\gamma$ を得る．しかし，非相対論的な星に対する 41 節の結果の借用は $\varrho_0 \ll \varrho_c$ に対してだけ正当化される．他の場合は相対論的効果は小さくない．$\varrho_0 \ll \varrho_c$ に対しては，ポリトロープ状態方程式は係数

$$\gamma = \frac{5}{3}\,, \qquad K = \frac{\hbar^2}{15\,\pi^2\, m_n} \left(\frac{3\,\pi^2}{m_n}\right)^{5/3} \tag{43.5}$$

を取る．この $\gamma$ と $K$ とを使うと(41.16)と(41.14)とから

$$M = 2.7\left(\frac{\varrho_0}{\varrho_c}\right)^{1/2} M_\odot \qquad (\varrho_0 \ll \varrho_c) \tag{43.6}$$

$$R = 11\left(\frac{\varrho_c}{\varrho_0}\right)^{1/6} \mathrm{km} \qquad (\varrho_0 \ll \varrho_c) \tag{43.7}$$

が出る．$\varrho_0 \gg \varrho_c$ に対しては白色矮星の際のように質量の上限 $M_C$ があり，これは**オッペンハイマー－ボルコフの限界質量**と呼ばれている．この限界質量の大きさの程度は $\varrho_0 \sim \varrho_c$ とした(43.6)から与えられる．$M_C$ の正確な計算では次のような側面が考察される．

1. オッペンハイマー－ボルコフ方程式の相対論的補正．40 節によると相対論の効果は中心への圧力勾配を強める傾向がある．すなわちそれは星を不安定にし，よって $M_C$ を低下させる．
2. 中性子の核力の芯同士の衝突による強い相互作用．強い相互作用の考えに基づくと原子核の圧縮性は理想フェルミガスのそれよりほぼ 10 倍小さい．この効果は限界質量 $M_C$ を高める

いくつかのモデル計算は

$$1.5M_\odot \le M_C \le 3M_\odot \tag{43.8}$$

の範囲の限界質量を与える．臨界密度(43.2)を数値的に評価すると

$$\boxed{\varrho_c = \frac{m_n^4 c^3}{3\pi^2\hbar^3} \approx 6\times 10^{18}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad \text{中性子星の質量密度}} \tag{43.9}$$

を得る．これは原子核の密度に相当する．

(43.7)と $\varrho \sim \varrho_c$ とから中性子星の半径として $R \sim 10\,\mathrm{km}$ を得る．相対論効果は $M = M_\odot$ と $R \sim 10\,\mathrm{km}$ に対して

$$\boxed{\frac{2GM}{Rc^2} \approx \frac{r_{S,\odot}}{R} \sim 0.3 \qquad \text{中性子星の重力場}} \tag{43.10}$$

の大きさとなる．

## パルサー

1967年，放射がパルス状に周期的に送り出され，そのために**パルサー**という名がつけれた電波源が発見された[9]．非常に規則正しいパルスの振動数は星の回転振動数であろうと解釈され，それは収縮の際の角運動量保存のために非常に高くなったと思われる．観測された振動数（$\sim 1\,s^{-1} \ldots 10^{-2}\,s^{-1}$）は星の半径 $R \sim 10$ km と整合する．そのうえ連星系では，パルサーの質量を決めることができる．この場合，質量は $M \approx 1.3 \sim 1.5\,M_\odot$ の範囲であることがわかった．このような質量と半径のために，この星を中性子星とする解釈が当然出てきた．この解釈は他のいろいろな観測事実のおおまかな説明にもなっている．よってパルサーには中性子星がかかわっているということは，今日では専門家の間でほとんど疑いをもつものはいない．

主系列星の数は質量の増加とともに減少する（ほぼ $M^{-2.35}$ に比例する）．それで中性子星は質量が小さくなるほど出現が多くなると思うかもしれない．というのは，上で述べた静的なモデルでは，すべての質量が $M_\mathrm{C}$ より下で同等の資格をもっている．しかし，観測的に $M \approx 1.3 \sim 1.5\,M_\odot$ の範囲の中性子星だけが見つかっている．より小さな質量の中性子星が出現しないことに対する説明は，星の動力学的な進化を考慮に入れてなされなければならないだろう[10]．

パルス型の放射は，磁気軸が星の角運動量の軸とは一致しない強い磁場を考えれば説明できる．荷電粒子は主として磁力線に沿って運動する．その際，粒子は強い重力場で加速される．そして，高速で磁場の極にぶつかり急減速する．これによって電磁波が発生し，それは主として磁気軸の周りの円錐内に放射される．この放射円錐は星の回転周波数で回転軸の周りを回転して，観測にかかるパルスを生じる．

ここに概説したモデルは観測と合っている．特に，極の強い磁場はランダウ準位の間の電子の遷移によって検出され，その強度が確かめられている．ランダウ準位は強い磁場中で量子力化された電子状態である．

---

[9] A. Hewish et al., *Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source*, Nature 217 (1968) 709. ヒューイッシュはこの発見に対して 1974 年ノーベル賞を授与された．

[10] G. E. Brown, Phys. Blätter 53 (1997) 671.

さて，どの中性子星もパルサーとして姿を現すわけではないだろうし，そもそもパルサーに成るかどうかわからない．というのも，まず磁気円錐が地球のほうを向いていないかもしれないし，磁場のない（あるいは弱い）中性子星もあるだろう．

次に述べる効果は，比較的一定であるパルス周波数を変動させる可能性がある．

1. 不連続的な小さな変動が観測されており，それは星の地震（星震）で説明される．星震はパルサーの慣性モーメントの（わずかな）変動を引き起こし，対応する回転周波数の飛びを引き起こす．
2. 磁気軸が回転軸と一致しないことが電磁波の放射につながる．これは質量分布の回転対称性を損なう可能性があり，重力波の放射を引き起こす (36 節も見よ)．これらの効果は回転のゆっくりとした連続的な減少を引き起こす．そのために，パルサーの回転は歳月が経つほどゆっくりとなるであろう．
3. 連星系のなかには，中性子星の重力場が相手の物質を吸い取ることができるものがあるかもしれない．そのとき吸い取られたプラズマは，ある特別な方向をもつ（連星系の軌道面にある）降着円盤にたまる．プラズマは最終的に中性子星に捕獲され，その角運動量をそれに移す．これによってパルサーの回転周波数が高まる．これは極端に早いパルサーに対する解釈であり，ほぼ $10^{-3}$ s までの周期のパルサーが今日までに観測されている．

精巧な時計を取りつけられているパルサーは天文学と天体力学の貴重な補助手段である．たとえば連星系に対して，パルスのドップラーシフトの強さと変動から，直接的かつ非常に正確に軌道周期と軌道速度が推定される（同じ原理が当然目で見える星の光のスペクトル線のドップラーシフトにも成り立つ）．これについては 36 節で考察された PSR 1913+16 系が思い出され，その系では驚くべき精度で軌道のデータが定められている．

1054 年に中国の天文学者によって一つの超新星が記録に残されたが，その場所に現在カニ星雲がある．超新星と中性子星の発生との関係についてのわ

れわれの推測は，そのカニ星雲の中心に見いだされたパルサーの存在によって支持されている．

# IX　星の動的モデル

## 44　時間に依存する等方な計量とバーコフの定理

39 節で与えられたシュワルツシルトの内部解と外部解は等方で静的な場合に成り立つ．これに対して，ここでは時間依存性を取り入れよう．これに対する解はまず源なしの空間に対して与えられ，さらに 47 節では一様な密度分布の領域で求められる．

時間依存のある場合への標準形(23.3)の一般化は

$$d\,s^2 = B(r,\,t)\,c^2dt^2 - A(r,\,t)\,dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right) \tag{44.1}$$

で与えられる．標準形(23.3)を導き出した論拠は，そのまま時間依存のある場合に引き継がれる．すなわち，等方性は $d\theta$ と $d\phi$ に線形である項の存在を禁ずる．また，$dr\,dt$ をもつ項は新しい時間座標を導入することで消去することができる．角度微分に $r^2$ がついているのは特別な半径座標を選んでいるためである．このようにして時間依存性は，計量係数 $A$ と $B$ に引数として $t$ が生じるということだけになる．

(44.1)に対する計量テンソルは対角である．

$$\left(g_{\mu\nu}\right) = \mathrm{diag}\left(B(r,\,t),\,-A(r,\,t),\,-r^2,\,-r^2\sin^2\theta\right) \tag{44.2}$$

反変成分は $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$ である．まずクリストッフェル記号を定める．

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{g^{\sigma\nu}}{2}\left(\frac{\partial\,g_{\mu\nu}}{\partial\,x^{\lambda}} + \frac{\partial\,g_{\lambda\nu}}{\partial\,x^{\mu}} - \frac{\partial\,g_{\mu\lambda}}{\partial\,x^{\nu}}\right) \tag{44.3}$$

23 節に比べると時間微分が余分に生じる．ゼロにならない成分は以下のとおりである．

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{B}}{2B}\,, && \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{B'}{2B}\,, && \Gamma^1_{00} = \frac{B'}{2A} \\
&\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{01} = \frac{\dot{A}}{2A}\,, && \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{A}}{2B}\,, && \Gamma^1_{11} = \frac{A'}{2A} \\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}\,, && \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{A}\,, && \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\
&\Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{A}\,, && \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta\,, && \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
\tag{44.4}
$$

ここで黒点は時間微分 $\partial/\partial(ct)$ である．リッチ・テンソル

$$
R_{\mu\nu} = \frac{\partial\,\Gamma^\rho_{\mu\rho}}{\partial\,x^\nu} - \frac{\partial\,\Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial\,x^\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\,\Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\,\Gamma^\rho_{\sigma\rho} \tag{44.5}
$$

に対して下記の表示を得る．

$$
R_{00} = \frac{\ddot{A}}{2A} - \frac{\dot{A}}{4A}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right) - \frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA} \tag{44.6}
$$

$$
R_{11} = -\frac{\ddot{A}}{2B} + \frac{\dot{A}}{4B}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right) + \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} \tag{44.7}
$$

$$
R_{22} = -1 - \frac{r}{2A}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} \tag{44.8}
$$

$$
R_{33} = R_{22}\,\sin^2\theta \tag{44.9}
$$

$$
R_{01} = R_{10} = -\frac{\dot{A}}{A\,r} \tag{44.10}
$$

$$
R_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{他のすべての成分} \tag{44.11}
$$

**源なし**の場の方程式

$$
R_{\mu\nu} = 0 \tag{44.12}
$$

にリッチ・テンソルを代入する．$R_{10} = -\dot{A}/(A\,r) = 0$ から

$$\frac{\partial\, A(r,\, t)}{\partial t} = 0, \quad \text{よって} \quad A(r,\, t) = A(r) \tag{44.13}$$

が出る．$R_{00}/B + R_{11}/A = 0$ から (24.7)-(24.9) と同じように $A\,B = 1$ となり，よって $B(r,\, t) = 1/A(r)$ となる．このようにして $R_{\mu\nu}$ の**すべての**時間微分はなくなり，よく知られたシュワルツシルトの解を得る．

$$A(r) = \frac{1}{1 - r_{\rm S}/r} \quad \text{そして} \quad B(r) = 1 - \frac{r_{\rm S}}{r} \tag{44.14}$$

ニュートン極限と比較すると積分定数

$$r_{\rm S} = \frac{2\,G\,M}{c^2} \tag{44.15}$$

が決まる．ここで $M$ は球対称な源の分布の総和である．(44.12) によって，解 (44.14) はこの分布の外部でのみ成り立つ．外部空間で重力場が時間に依存しないことは等方性の結果である，ということをここでの解は示している．このことは**バーコフの定理**と呼ばれる．

**バーコフの定理：**

物質のない空間では，球対称な重力場は静的である．

電気力学の対応する命題はよく知られている．すなわち球形の荷電分布は，外部からは $r = 0$ に点電荷があるように見える．これはガウスの定理から簡単に出てくる．球状電荷分布それ自身は時間依存性があってもよい．たとえば，原子核に関係して単極振動が起こってもよい．これに対して，多極振動は等方性を損なうのでここでは認められないが，本当はそのような振動のみが波の放射に帰着する．半径方向の流れは，場の方程式に含まれている連続の方程式を満たさなければならない．これは，総電荷 $Q$ に対して $Q = \text{const.}$ が成り立つことを意味している[1]．

これと類似しているが，(44.14) を生じさせる質量分布は，半径方向に（たとえば単極振動あるいは半径方向の崩壊の形で）運動してもよい．この際，総質量 $M$ は一定である．

[1] 訳注：ガウスの定理から明らか．

## マッハ原理

われわれは，計算結果(44.14)を質量分布の**外部の**場にすでに適用した．しかし，これを**球状質量分布の内部の真空空間**にも適用することができる．というのは，(44.14)に対して等方性と $R_{\mu\nu}=0$ のみを前提としているからである．この場合，中心に質量はないので，その解では $r_{\mathrm{S}}=0$ と置かれる．よって球座標でミンコフスキー計量となるか，あるいは自明な座標変換によって

$$\boxed{ds^2=\eta_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu \qquad \text{球状質量分布内部の真空空間の計量}} \tag{44.16}$$

となる．この見たところ自明な形に関連して，バーコフの定理は次の重要な応用をもっている．すなわち，宇宙における質量分布と速度分布は，われわれの目からは（他の典型的な恒星からも同様に）平均として等方であるように見える（第X章，宇宙論）．今，われわれの周辺の質量をさし当たり無視することにする．すると，この真空空間で(44.16)が成り立つ．すなわち，$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ は今の場合の場の方程式の解である．ところで遠方の動いている質量，特に膨張している宇宙の質量が許されるので，この解は自明ではない．この形の解としてわれわれは慣性系をすでに知っている．この慣性系に相対的に一定速度で運動している系も同様に慣性系であるが，この系に対して回転しているかあるいは何かの方法で加速している系は慣性系ではない．というのは，慣性系への変換は線素の形を変えるからである．このようにして得られた慣性系はある限定された範囲にある質量が（最低次の近似で）無視されている局所的な基準系である．実際のところ，宇宙の計量としても単に局所慣性系だけが許される．

ここで考えた慣性系の真空空間にまず局所的な質量（惑星をともなう太陽や天の川）を認める．すると $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ から始めて，この質量は摂動論的に考慮に入れることができる．線形化された場の方程式に質量はミンコフスキー計量に小さなずれを導く．この考察はまた，太陽系内でのわれわれの計算の後付けの正当化でもある．ここでは，われわれは宇宙の質量を無視しているし，さらに計量は漸近的にミンコフスキー計量になるという単純な前提から出発している．

要約して確認すると

- **ある基準系から見ると宇宙の質量分布は全体として，かつ平均として，等方であるように見える．慣性系はそのような基準系によって与えられる．**

この際の決定的な仮定は等方性である．これは特に，恒星天に相対的に回転している基準系を排除する．

マッハ原理では，宇宙の質量は慣性系を規定すると理解されている．現在認められているこの命題は，マッハ原理の確認とみなされている．

マッハ(1838–1916) 自身はここで見いだされた宇宙の質量と慣性系の関係をたぶん認めてなかったようだし，そもそも彼は一度も特殊相対論を受け入れなかった．**マッハ原理**という言葉はアインシュタインによって 1918 年に創り出された．彼はマッハ原理を，場の方程式の源の分布が計量（そしてそれによって局所慣性系）を定めると理解していた．しかしながら，このような関係は一義的には打ち立てられない．すなわち，真空空間には $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ のほかに物理的な解，たとえば波動解が存在する．このような多義性はまた電気力学にも存在する．一般相対論では，場の方程式の非線形性によって問題がさらに加わる．

“マッハ原理” という概念は，その成立の歴史を辿ってみれば文献でさまざまな表現があっても驚くべきことではない[2]．ここで議論している宇宙の質量と（局所）慣性系の間の関係は，特に回転している基準系と回転していない基準系の間で異なっている．これらは，ニュートンのバケツについてのマッハのコメント（9 節，40 ページ）と，ティリング－レンゼ効果（30 節）を思い出させる．

[2] ボンディとサミュエル(H. Bondi and J. Samuel)は *The Thirring-Lense-Effecct and Mach's Principle*, E-Print grqc/9607009 in Archiv www.arxiv.org, で 10 のマッハ原理の解釈を表にしている．

# 45　シュワルツシルト半径

われわれはシュワルツシルト計量

$$d s^2 = \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right) c^2 d t^2 - \frac{d r^2}{1 - r_\mathrm{S}/r} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{45.1}$$

における面 $r = r_\mathrm{S}$ の物理的な意味を議論する．これに関しては，われわれはシュワルツシルト半径 $r_\mathrm{S}$ の内側の記述に適している座標を準備している（46 節）．半径 $R \le r_\mathrm{S}$ への星の崩壊とブラックホールの発生は 47 節と 48 節で取り扱われる．シュワルツシルト半径の意味の議論はそこでも繰り返されるであろう．

パルサーを含めて半径 $R$ がシュワルツシルト半径 $r_\mathrm{S}$ と同じ程度（$M \sim M_\odot$ に対して $R \sim 3\,r_\mathrm{S}$）の星が存在する．さらに，$M \gg M_\odot$ である星がより小さな半径へ収縮することを妨げる機構は何もない．というのは，(40.11) によって $R \to (9/8)\,r_\mathrm{S}$ になると圧力は発散し，星は崩壊する以外にないからである．中心対称な場合は，バーコフの定理によれば崩壊している星の外部ではシュワルツシルト計量が成り立つ．したがって，$R \gg r_\mathrm{S}$ である普通の星と対照的に，計量 (45.1) に現れるシュワルツシルト半径の意味するところが今や問題となる．

計量テンソルは座標の選択に依存する．座標の選択では空間の（たとえば曲率のような）構造は変えられないが，特異点をもつ計量係数をもたらすことは大いにある．たとえば，“特異な” 座標として次の 2 次元の線素を考えよう．

$$d s^2 = \frac{1}{X^3}\, d X^2 + Y\, d Y^2 \tag{45.2}$$

これによれば，$X = Y = 0$ で空間特性が特異になりそうである．しかし，実際には (45.2) で “特異な” 座標が選ばれているだけである．だから $X = 4/x^2$ および $Y = (3\,y/2)^{2/3}$ と変換すると

$$d s^2 = d x^2 + d y^2 \tag{45.3}$$

になる．すなわち，(45.2)は2次元ユークリッド空間の線素である．

他の例は球面に対する座標 $x^1 = \theta$ と $x^2 = \phi$ である．ここで計量係数 $g^{22} = 1/\sin^2\theta$ は極では特異になる．これもまた完全な座標特異点である．というのは，極での空間構造は球面の他のすべての点と同等であるからである．さて，線素(45.1)をもつシュワルツシルト計量を考えよう．計量テンソルの行列式は

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -r^4 \sin^2\theta \tag{45.4}$$

である．曲率テンソル $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$ のゼロでない成分は $r_S/r^3$ に比例している．これから一つのスカラー値

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda}\, R^{\mu\nu\kappa\lambda} = 12\,\frac{{r_S}^2}{r^6} \tag{45.5}$$

ができる．スカラー曲率はこの考察には適していない．というのは，シュワルツシルト計量は源なしの場の方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ の解であり，したがって $R^\nu{}_\nu = 0$ が成り立つからである．(45.4)と(45.5)の結果は，空間特性は $r = 0$ では特異であるが，シュワルツシルト半径ではそうではないということを意味している．

$r \to 0$ ではスカラーの量(45.5)は発散する．この特異性は，座標変換では取り除けない．というのは，$R_{\mu\nu\kappa\lambda}\, R^{\mu\nu\kappa\lambda}$ はリーマン・スカラーだからである．よって空間は $r = 0$ で特異である．この特異性は，源項として具体的に書き入れていなかった $r = 0$ にある質点によって引き起こされる．実際，計量係数(45.1)は $r \neq 0$ に対してのみ場の方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ の解になっている．これに対して，$r = 0$ でも $R_{\mu\nu} = 0$ であることを要請すれば $r_S = 0$ となる．この状況は電気力学のそれによく似ている．球座標でのラプラス方程式 $\Delta\Phi_e = 0$ の解は，定数 $C_1$ と $C_2$ とをもつポテンシャル $\Phi_e = C_1/r + C_2$ となる．実際 $C_1 \neq 0$ とすると，この $\Phi_e$ は $r \neq 0$ に対してだけラプラス方程式の解になっている[3]．以下では，$r = 0$ の特異性はもはや考えないことにする．

(45.4)と(45.5)の結果は，$r = r_S$ の空間は特異ではないということを意味している．これを具体的に示すために別の座標を導入する．それは $r \sim r_S$ の

[3] 訳注：$C_1$ は総電荷であり，ラプラス方程式には具体的には現れない．

領域をきちんと表し，特異でない計量係数を与える（46 節）．これは北極における状況と比べられる．すなわち，$\theta = 0$ の周辺に局所的なデカルト座標系を導入でき，それを使って計量係数 $g^{22} = 1/\sin^2\theta$ の特異性は単に座標 $\theta$ と $\phi$ の選択に依るものであることを示すことができる．

北極の例で述べたように，$r = r_S$ での特異性は座標の特別な選択によるものである．すなわち，座標の特異性が問題である．しかし，$r \sim r_S$ に関する状況は球面の例であげたのとはまた違う本質的な点がある．北極は球面の他のすべての点と同じ性質をもっているのであるが，面 $r = r_S$ は，**物理的に**きわめて特殊である．シュワルツシルト半径のこの物理的な意味を以下で調べよう．

重力場(45.1)中の粒子の運動方程式を考える．自由落下質点（静止質量 $m$）の半径方向の速度 $\dot{r} = dr/d\tau$ は，エネルギー則

$$\dot{r}^2/2 + V_{\text{eff}}(r) = C \tag{45.6}$$

を満たす．ここで $C$ =const.（25 節）．半径に沿って中心に落下している粒子を考える．するとその角運動量 $\ell$ はゼロとなり，有効ポテンシャル(25.27)は $V_{\text{eff}} = -GM/r$ となる．この自由落下粒子が，$r(0) = r_0$ から $r_S$ まで進む間の固有時 $\tau_1$ を計算する．

$$\tau_1 = \int_{r_0}^{r_S} dr\,\frac{d\tau}{dr} = -\int_{r_0}^{r_S} \frac{dr}{\sqrt{2\,(C + GM/r)}} \tag{45.7}$$

ここで $C \geq -GM/r_0$ であり，粒子が $r_0$ で静止しているとすれば $C = -GM/r_0$ が成り立つ．演習 25.3 では，具体的に $r_0 = 3\,r_S$ に対する計算がなされている．さて $r(0) = r_0$ から中心まで落下するのに，この自由落下粒子が要する固有時 $\tau_2$ を計算する．

$$\tau_2 = \int_{r_0}^{0} dr\,\frac{d\tau}{dr} = -\int_{r_0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{2\,(C + GM/r)}} \tag{45.8}$$

どちらの積分も有限であり，粒子はシュワルツシルト半径にも中心にも有限の固有時で到着する．$r_0$ から中心への道筋でシュワルツシルト半径はことさらに現れることはない．48 節では，宇宙船に乗っている宇宙飛行士は面 $r = r_S$ を無事に横断できるかどうかという疑問を議論する．

$\lambda = \tau$ と置き，かつ $B = 1 - r_S/r$ とした(25.13)から

$$\frac{c\,dt}{d\tau} = \frac{F}{1 - r_S/r} \tag{45.9}$$

が出る．この積分定数 $F$ は初期条件に依存する．シュワルツシルト計量の時間 $t$ で計ると，粒子はシュワルツシルト半径に着くまでに次に示すように無限の時間を要する．

$$t_1 = \int_{r_0}^{r_S} dt = -\int_{r_0}^{r_S} \frac{F\,dr}{c\sqrt{2\,(C + GM/r)}\;(1 - r_S/r)} = \infty \tag{45.10}$$

シュワルツシルト計量の時間 $t$ ははるか彼方に静止している観測者の時計の時刻である．彼にとって接近 $r \to r_S$ は無限に長い時間かかる．一方，いっしょに落ちている観測者にとっては，これは有限の時間 $\tau_1$ で起こる．

落下している粒子がはるかに離れた観測者に信号を送ることができるとする．その信号は観測者に赤方偏移

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - r_S/r}} - 1 \xrightarrow{r \to r_S} \infty \tag{45.11}$$

をともなって届く．そのために，その粒子は（48節でさらにくわしく議論するように）観測者に非常に短い時間の後に観測されなくなる．この赤方偏移の発散はシュワルツシルト計量の時間 $\Delta t$ の発散に対応していて，光子（$ds = 0$）が $r_S$ から $r_0$ にいくために必要とする時間である．

$$\Delta t = \int_{r_S}^{r_0} dt = \int_{r_S}^{r_0} \left(\frac{dt}{dr}\right)_{ds=0} = \frac{1}{c}\int_{r_S}^{r_0} \frac{dr}{1 - r_S/r} = \infty \tag{45.12}$$

(45.10)-(45.12)の結果は明らかに座標 $t$ は $r \le r_S$ の範囲での出来事を記述するには不適当であることを意味している（そこでは $g_{00} < 0$ である）．自由落下の観測者が有限の時間で中心に到達するのであるから，$r \le r_S$ の領域でも事象は存在している．

要約すると，

1. $r = r_S$ 面は物理的に特別な面である．外部にいる観測者に対しては自由落下粒子は漸近的（$t \to \infty$）に半径 $r_S$ に近づく．外部にいるこの観測者は領域 $r \le r_S$ からの情報は何も得ることはできない．彼にとっては面 $r = r_S$ は地平線であり，その向こうを見ることはできない．

2. いっしょに落下している観測者にとっては場所 $r_S$ は何も特別な場所ではない．空間構造はそこでは特異ではない．この観測者は領域 $r \leq r_S$ で事象を体験する．すなわちこのような事象が存在する．

3. シュワルツシルト座標は領域 $r \leq r_S$ での事象を記述するには適当ではない．外部の物理学者にこの事象は観測されないので，その考察も断念せざるをえない．

$r_S$ において空間が正常であることは，局所慣性系をそこに取りうるということを示唆している．$r_S$ が物理的には特殊であるということは局所慣性系の接続の際に明らかになる．すなわち，$r_S$ の内側の局所慣性系は外側からの局所慣性系と因果関係を満たす形で接続できない．このような状況は，もう一度宇宙の空間構造でめぐり会うことになろう．そこでは，われわれの天の川の局所慣性系は，宇宙の地平線の向こう側の銀河の局所慣性系とは接続できないのである．

ここで示された計算は，自由落下の観測者と**ともに運動する座標**は領域 $r \leq r_S$ の記述に適しているということを示唆している．このような座標を次の節で導入する．星の半径の外部ではこれまでどおりシュワルツシルト計量を使う．そして星の崩壊はこの二つの計量を使って記述され，星の端ではこの二つは互いつながれる．また二つの空間を覆う座標を導入することも可能である．このような座標はクルスカル(Kruskal)によって1960年に導入された（**クルスカル計量**）．

**演習**

45.1: もし演習 25.3 をまだ解いていないならば，それをやること．

# 46 ガウス座標における時間に依存する等方な計量

時間に依存しかつ等方な場合には，いわゆるガウス座標を導入する．これを使えばシュワルツシルト半径内部の事象も記述できる．計量テンソルから，われわれはクリストッフェル記号やリッチ・テンソルを計算できる．ガウス座標は，星の中心への崩壊を記述するのに適している（47 節）．

(23.2) から始め，そこで計量係数の時間依存性を認めると

$$ds^2 = B(r,\, t)\, c^2 dt^2 - A(r,\, t)\, dr^2 - C(r,\, t)\, r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \quad (46.1)$$

となる．角度座標は通常の意味をもっている．等方性により，$d\theta$ と $d\phi$ に線形な項はない．さらに座標変換（$t = f_1(r',t')$ と $r = f_2(r',t')$）が可能であるが，この二つの関数は任意である．この任意な関数の一つが $dr\,dt$ をもつはずの項を消去するために使われるが，このような項は処理済みとして最初から書き込まれていない．もう一つの関数は，係数 $g_{00}$ が 1 になるように選ぶことができる．係数の記号を書き換えて（そして新しい座標をダッシュで示すことなしに）次の表式を得る．

ガウス座標での等方計量：

$$ds^2 = c^2 dt^2 - U(r,\, t)\, dr^2 - V(r,\, t)\, \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \quad (46.2)$$

(46.1) で $C(r,\, t) = 1$ となるよう座標選択の自由度を使うこともできる．ここまでは，(46.2) は (44.1) の代わりであり，（角度座標を除いて）座標は当然別の意味をもつ．(46.2) の座標 $x^\mu = (ct,\, r,\, \theta,\, \phi)$ は**ガウスの正規化座標**と呼ばれる．

計量テンソル

$$\left(g_{\mu\nu}\right) = \mathrm{diag}\left(1,\, -U(r,\, t),\, -V(r,\, t),\, -V(r,\, t)\, \sin^2\theta\right) \quad (46.3)$$

は対角である．よって $g^{\mu\nu} = 1/g_{\mu\nu}$ が成り立つ．(46.3) から次を得る．

$$\Gamma^{\lambda}_{00} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2}\left(\frac{\partial g_{\rho 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\rho}\right) = g^{\lambda\rho}\frac{\partial g_{\rho 0}}{\partial x^0} = 0 \tag{46.4}$$

$\Gamma^{\lambda}_{00} = 0$ であるので，$(u^\mu) = (c, 0, 0, 0)$ が運動方程式の一つの解である．

$$(u^\mu) = (c, 0, 0, 0) \quad : \quad \frac{d u^\lambda}{d\tau} = -\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad \text{の解} \tag{46.5}$$

$u^i = dx^i/d\tau = 0$ から $x^i = \text{const.}$ が出る．よって，自由落下粒子の軌道は $x^i = \text{const.}$ である．次の関係

$$d\tau = \left(\frac{ds}{c}\right)_{x^i=\text{const.}} = dt \tag{46.6}$$

のために，$t$ は座標 $x^i = \text{const.}$ をもつ時計の固有時である．

ガウス座標は**ともに動いている座標（共動座標）**と言うことができる．このことを考えるために $N$ 個の石か塵の粒でできている等方な星を考え，石や塵に $\nu = 1, 2, \ldots, N$ と番号をつけることにする．この星はこれらの石が緩やかに集まって構成されており，それぞれの石は自由に落下できるとする．それらの石に特定の座標 $(x^i_\nu) = (r_\nu, \theta_\nu, \phi_\nu)$ を割り当てる．半径 $r$ は中心からの距離とともに増大すべきだが，それは次節以降はスケール因子で測られる．それぞれの石には時計がつけられており，最初はすべての石は静止していて，時計は $t = 0$ となっているものとする．今から（$t > 0$ に対して）石は重力場中で落ち始める．それぞれの石の軌道は $x^i_\nu = \text{const.}$ であり（なぜならこれらは初期条件と運動方程式を満たすから），つけられている時計は時刻 $t_\nu$ を示す．星の領域の事象は今や座標 $t = t_\mu$ と $x = x^i_\mu$ をもち，$\mu$ は石を示す．そしてその石は，事象の起こった場所と時間にいるのである．このために，空間は十分に小さな石でびっしりと埋められていると仮定されている．

すぐ前の節の議論から，石は $r > r_{\mathrm{S}}$ から中心 $r = 0$ に有限の時間で着くということをわれわれは知っている．よって今，選んだ共動座標を使ってシュワルツシルト半径の内側の領域を記述できるということは明らかである．

すべての自由落下粒子が $x^i = \text{const.}$ の形の軌道をもっているわけではない．等方な重力場中では，当然，半径方向でない運動をする自由落下粒子がある．たとえば，楕円状の軌道を走る粒子もあっていい．これと対照的に，$x^i_\nu = \text{const.}$ は非常に特別な軌道を与える．この特別な軌道は，一方では ($\theta_\nu = $const.

と $\phi_\nu$ =const. のために）半径方向であり，他方では速度が半径方向であることは計量係数 $U(r,t)$ と $V(r,t)$ の時間依存性だけからもたらされる．この時間依存性は次の節でくわしく述べる．

宇宙論でも(46.2)の形の計量が使われる．そして $x^i_\nu$ = const. をもつ質量要素は自由落下の銀河である．銀河のなかの星は同じく重力場中を自由落下する．星の軌道はしかしながら，その銀河に相対的な固有運動のために $x^i$ = const. の形ではない．この固有運動は初期条件と銀河の局所重力場によって与えられるが，二つの効果は計量(46.2)には含まれていない．

最後に，計量(46.3)に対応するクリストッフェル記号でゼロでないものを計算すると

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{\dot U}{2U}\,, \qquad \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot V}{2V}\\
&\Gamma^0_{11} = \frac{\dot U}{2}\,, \qquad \Gamma^0_{22} = \frac{\dot V}{2}\,, \qquad \Gamma^0_{33} = \frac{\dot V \sin^2\theta}{2}\\
&\Gamma^1_{11} = \frac{U'}{2U}\,, \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{V'}{2U}\,, \qquad \Gamma^1_{33} = -\frac{V'\sin^2\theta}{2U}\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{V'}{2V}\\
&\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta\,, \qquad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta
\end{aligned} \tag{46.7}$$

を得る．リッチ・テンソルのゼロでない成分は

$$R_{00} = \frac{\ddot U}{2U} + \frac{\ddot V}{V} - \frac{\dot U^2}{4U^2} - \frac{\dot V^2}{2V^2} \tag{46.8}$$

$$R_{11} = -\frac{\ddot U}{2} + \frac{\dot U^2}{4U} - \frac{\dot U\,\dot V}{2V} + \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'\,V'}{2UV} \tag{46.9}$$

$$R_{22} = -1 - \frac{\ddot V}{2} - \frac{\dot U\,\dot V}{4U} + \frac{V''}{2U} - \frac{U'\,V'}{4U^2} \tag{46.10}$$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{\dot V'}{V} - \frac{\dot V\,V'}{2V^2} - \frac{\dot U\,V'}{2UV} \tag{46.11}$$

である．ここで $\dot X = \partial X/\partial(ct)$ である．$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta$ は記載されていない．さらに他のすべての $R_{\mu\nu}$ はゼロである．アインシュタインの場の方程式は，未知関数 $U(r,t)$ と $V(r,t)$ に対する連立微分方程式を与える．

# 47 重力崩壊，超新星

星自身の重力による星の中心への崩壊を調べる．星の崩壊は超新星として観測されることになる．

非常に簡単な条件のもとに崩壊を調べる．

1. 崩壊は中心（星の中心点）に関して等方であるとする．よって半径速度のみが許されるので，中心崩壊を考える．球対称であるので，計量(46.2)

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(1,\ -U(r,\ t),\ -V(r,\ t),\ -V(r,\ t)\sin^2\theta\right) \tag{47.1}$$

とガウス座標 $(x^\mu) = (ct,\ r,\ \theta,\ \phi)$ とを使う．

2. 崩壊に対抗するはずの物質の圧力を無視する．すなわち

$$P = 0 \tag{47.2}$$

さらに軌道が $x^i = \mathrm{const.}$，速度が

$$(u^\mu) = (dx^\mu/d\tau) = (c,\ 0,\ 0,\ 0) \tag{47.3}$$

である**粒子（塵，石）が緩やかに集まった集団**を導入する．これらの粒子の物理的な運動は計量係数 $U(r,\ t)$ と $V(r,\ t)$ の時間依存性だけからもたらされる．

3. 星の質量密度は一様であるとする．

$$\varrho(r,\ t) = \begin{cases} \varrho(t) & (r \le r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases} \tag{47.4}$$

すべての粒子の座標は崩壊の間は一定であるので，最初に一様な密度はまた崩壊の間も一様である．

このモデルはまったく異なった対象に応用できる．

- 銀河を粒子としてもつ宇宙

- 星を粒子としてもつ銀河
- 粒子からなる星
- 重力圧力が限りなく増える星．

いずれの場合も中心方向への速度のみが許されている．よって，たとえば現在の宇宙の膨張あるいは中心への星の崩壊が記述できる．一般に星は粒子の緩い集積からできているのではない．それにもかかわらず前提(47.2)-(47.3)は有意義である．$P = 0$ とおいて，（場の方程式の源項の）物質のエネルギー運動量テンソルの圧力を無視する．これは物質の内部圧力 $P_{\rm mat}$ であり，たとえばいわゆるプラズマに対しては $P_{\rm mat} = \varrho\, k_{\rm B}\, T/m$ である．これに対して(40.7)は，重力によって引き起こされる圧力 $P_{\rm grav}$ を与える．VIII章で考察された星の平衡に対しては $P = P_{\rm grav} = P_{\rm mat}$ が成り立つので，結局そこでは添字はつけなくてよかった．しかし $R \to (9/8)\, r_{\rm S}$ となって，(40.11)で示すように圧力 $P_{\rm grav}$ が発散するときは，必然的に

$$P_{\rm grav} \gg P_{\rm mat} \tag{47.5}$$

という非平衡状態になる．このとき，$P_{\rm mat} \approx 0$ という近似が場の方程式の源項で可能である．

われわれは，重力崩壊を場の方程式の解として書き表すことにする．

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\, g_{\mu\nu}\right) \tag{47.6}$$

星の外部（$r > r_0$）では右辺は消えるが，この場合シュワルツシルト計量を用いることができる．星の内部，すなわち $r \le r_0$ で(47.6)を解く．

(47.2)-(47.4)からエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = \left(\varrho + P/c^2\right)\, u_\mu\, u_\nu - P\, g_{\mu\nu} = \varrho(t)\, c^2\, \delta_\mu^0\, \delta_\nu^0 \tag{47.7}$$

を得る．これによって場の方程式の源項は

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T\right) = \frac{1}{2}\,{\rm diag}\,\left(\varrho\, c^2,\, U\, \varrho\, c^2,\, V\, \varrho\, c^2,\, V\, \varrho\, c^2\, \sin^2\theta\right) \tag{47.8}$$

となる．(46.8)-(46.11)を使うと場の方程式は次のようになる．

$$\frac{\ddot{U}}{2U}+\frac{\ddot{V}}{V}-\frac{\dot{U}^2}{4U^2}-\frac{\dot{V}^2}{2V^2}=-\frac{4\pi G}{c^2}\varrho \tag{47.9}$$

$$-\frac{\ddot{U}}{2}+\frac{\dot{U}^2}{4U}-\frac{\dot{U}\dot{V}}{2V}+\frac{V''}{V}-\frac{V'^2}{2V^2}-\frac{U'V'}{2UV}=-\frac{4\pi G}{c^2}\varrho U \tag{47.10}$$

$$-1-\frac{\ddot{V}}{2}-\frac{\dot{U}\dot{V}}{4U}+\frac{V''}{2U}-\frac{U'V'}{4U^2}=-\frac{4\pi G}{c^2}\varrho V \tag{47.11}$$

$$\frac{\dot{V}'}{V}-\frac{\dot{V}V'}{2V^2}-\frac{\dot{U}V'}{2UV}=0 \tag{47.12}$$

最初の三つの方程式は場所の微分と時間微分の和を含んでいる．このことは，次の変数分離法

$$U(r,t)=R(t)^2 f(r), \qquad V(r,t)=S(t)^2 g(r) \tag{47.13}$$

が適用できることを示唆している．変数分離法は多岐にわたる解を制限する．しかし，物理的な解は設定された問題に基づいて一義的であるから，**一つの解**が見つかれば十分である．もしもこのほかに解が見つかったら，それは同じ解で座標だけが異なったものであろう．(47.13)によって(47.12)は

$$\frac{\dot{S}}{S}=\frac{\dot{R}}{R}, \quad \text{よって} \quad S(t)=\text{const.}\cdot R(t) \tag{47.14}$$

となる．関数 $f(r)$ と $g(r)$ はまだ未定であるので，定数は 1 と置くことができる．計量(47.1)の形は半径座標の決め方に柔軟性があるので $(r\to r'=\varphi(r))$[4]，関数 $f(r)$ と $g(r)$ のうちの一つは任意に選ぶことができる．すなわち

$$U(r,t)=R(t)^2 f(r), \qquad V(r,t)=R(t)^2 r^2 \tag{47.15}$$

としてよい．これらを場の方程式(47.10)と(47.11)に代入する．すると

$$-\frac{f'}{r f^2}=\ddot{R}R+2\dot{R}^2-\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)R^2 \tag{47.16}$$

$$-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2 f}-\frac{f'}{2rf^2}=\ddot{R}R+2\dot{R}^2-\frac{4\pi G}{c^2}\varrho(t)R^2 \tag{47.17}$$

---

[4] 訳注：(23.3)式に関する訳注を参照のこと．

を得る．左辺は $r$ だけに依存するが，一方右辺は $t$ だけに依存する．よって，右辺も左辺も分離定数に等しい．二つの式の右辺が等しいのであるから，左辺の二つの式も同じ分離定数をもつ．すなわち

$$-2\,k = -\frac{f'}{r\,f^2}\,, \qquad -2\,k = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2\,f} - \frac{f'}{2\,r\,f^2} \tag{47.18}$$

$(f'/f^2)$ の項を消去すると

$$f\,(r) = \frac{1}{1 - k\,r^2} \tag{47.19}$$

となる．これは(47.18)の二つの方程式を満たす．よって，密度分布の内部 $(r \le r_0)$ で線素は次の形を取る．

$$\boxed{d\,s^2 = c^2\,d\,t^2 - R\,(t)^2 \left(\frac{d\,r^2}{1 - k\,r^2} + r^2\,\left(d\,\theta^2 + \sin^2\theta\,d\,\phi^2\right)\right)} \tag{47.20}$$

この式を見ると，星を形成している粒子の間のすべての距離は $R = R\,(t)$ で測られる．そして，$R$ はまた崩壊する星の時間に依存する半径と解釈される[5]．われわれは，$R$ は長さの次元をもつと決める．すると $r$ と $k$ は無次元になる．

さて，場の方程式とは別にエネルギー運動量保存則

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{\|\nu} &= T^{\mu\nu}{}_{|\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda}\,T^{\lambda\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\,T^{\lambda\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial\,x^\nu}\left(\sqrt{|g|}\;T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\,T^{\lambda\nu} = 0 \end{aligned} \tag{47.21}$$

も自由に使ってよい．この方程式を $\mu = 0$ に対して書く．(47.7)で $T^{00}$ だけがゼロでなくかつ $\Gamma^0_{00} = 0$ であるから，右辺の第二項は消える．よって

$$\frac{\partial}{\partial\,x^0}\left(\sqrt{|g|}\;T^{00}\right) = 0 \tag{47.22}$$

が成り立つ．$g = \det(\,g_{\mu\nu}\,)$ の時間依存性は(47.20)から $|g| \propto R\,(t)^6$ である．よって，$T^{00} = \varrho\,(t)\,c^2$ といっしょにして $\varrho\,R^3$ =const.，または

$$\boxed{M_0 = \frac{4\,\pi}{3}\,\varrho\,(t)\,R\,(t)^3 = \text{const.} \qquad \text{質量保存則}} \tag{47.23}$$

[5] IX章とX章では，記号 $R$ はスカラー曲率ではなく，つねに計量のスケール因子を表す．

を得る．この結果は質量保存則と解釈できる．

さて，場の方程式(47.9)を評価する．(47.15)を使うと左辺は $3\,\ddot{R}/R$ となる．すなわち

$$3\,\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\,\pi\,G}{c^2}\,\varrho = -\frac{3\,G\,M_0}{c^2\,R^3} \tag{47.24}$$

ここで(47.23)を利用した．この方程式に $2\,R\,\dot{R}/3$ を掛けると

$$2\,\ddot{R}\,\dot{R} = -\frac{2\,G\,M_0}{c^2}\,\frac{\dot{R}}{R^2} \tag{47.25}$$

となり，積分すると

$$\dot{R}^{\,2} = \text{const.} + \frac{2\,G\,M_0}{c^2}\,\frac{1}{R} \tag{47.26}$$

となる．定数を定めるために(47.24)と(47.26)とから次の和を作る．

$$\ddot{R}\,R + 2\,\dot{R}^{\,2} - \frac{3\,G\,M_0}{c^2}\,\frac{1}{R} = 2 \times \text{const.} \tag{47.27}$$

(47.23)からの $M_0$ を代入すると，左辺は(47.16)の右辺と等しくなる．すなわち $-2\,k$ となり，よって(47.26)は

$$\boxed{\dot{R}^{\,2} - \frac{2\,G\,M_0}{c^2}\,\frac{1}{R} = -k \qquad \text{エネルギー則}} \tag{47.28}$$

となる．この方程式では，すべての項は無次元である．$R$ と $G\,M_0/c^2$ は長さの次元をもち，時間微分 $d/d\,(c\,t)$ は長さの逆数の次元をもつ．$M_0/2$ を掛けると

$$\frac{M_0}{2}\left(\frac{d\,R}{d\,t}\right)^2 - \frac{G\,M_0^2}{R} = \text{const.} \tag{47.29}$$

となる．最初の項は質量分布の運動エネルギー，2 番目の項はポテンシャルエネルギーと解釈できる．よって(47.28)はエネルギー保存則を記述している．

今や次のことがわかった．共動座標をこのように選び，さらに球対称を仮定すると計量(47.1)を得る．場の方程式によって(47.1)から(47.20)が出る．この時点ではまだ $\varrho\,(t)$ と $R\,(t)$ が未決定である．場の方程式を使うと，この二つの量を含んだ質量保存則(47.23)とエネルギー保存則(47.28)が得られる．これらの方程式は，非相対論の観点からはただちに納得のいくものである．

しかしこの結果はニュートン理論とは異なる．というのは $t$ はともに動く時計の時刻であり，計量は平坦な空間のものではない．

さて，(47.28) の解の時間依存性を議論しよう．粒子の座標値は一定であるから，関数 $R(t)$ が粒子の運動を定める．時間 $t=0$ に対しては，すべての粒子は静止しているであろうから

$$\dot{R}(0) = 0 \tag{47.30}$$

である．よって (47.28) から

$$k = \frac{2\,G\,M_0}{c^2}\,\frac{1}{R(0)} \tag{47.31}$$

と

$$\dot{R}^{\,2} = k\,\frac{R(0) - R(t)}{R(t)} \tag{47.32}$$

が出る．この微分方程式の解は次のパラメター表示

$$c\,t = \frac{R(0)}{2\sqrt{k}}\,(\,\psi + \sin\psi\,) \tag{47.33}$$

$$R = \frac{R(0)}{2}\,(\,1 + \cos\psi\,) \tag{47.34}$$

で示される**サイクロイド**である．このサイクロイドは図 47.1 に描かれている．選ばれた初期条件 $\dot{R}(0) = 0$ は，時刻 $t=0$ に静止している粒子の集合の初期条件に対応している．重力は粒子を中心へ加速する．星の端の座標値 $r_0 = \mathrm{const.}$ からと (47.20) とから星の表面の面積 $F$

$$F = 4\,\pi\,r_0^2\,R(t)^2 \tag{47.35}$$

が出る．$\psi = \pi$ で $R = 0$ となり，よって星は点状の特異点になる．この特異点には

$$T = t_{\psi=\pi} = \frac{R(0)\,\pi}{2\,c\sqrt{k}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{R(0)}{c}\,\sqrt{\frac{c^2\,R(0)}{2\,G\,M_0}} \tag{47.36}$$

の時間の後に達する（この結果は演習 25.3 ですでに直接に得られている）．解は，数学的には図 47.1 に示されるように継続する．次の節で崩壊の議論を続ける．その際，計量 (47.20) を外部空間 $r > r_0$ のシュワルツシルト計量と接続することを考える．

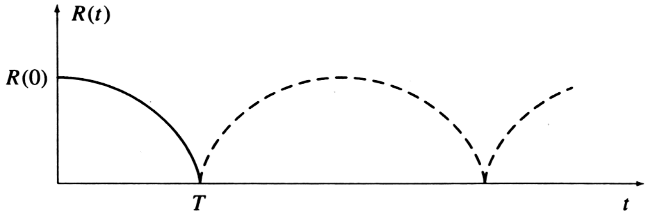



**図 47.1**: 計量(47.20)に現れる長さのパラメター $R(t)$. 星を形成しているすべての粒子は $R(t)$ で測られるので, $R(t)$ は崩壊している星の半径として理解できる. 物理的な解は $t = T$ で終わる. (47.33), (47.34)の数学的な解は周期的につづく.

## 超新星(Supernova)

Nova という言葉で, 数時間の間にその明るさが $10^2$ 倍から $10^4$ 倍も増大する星を表す. そして, それは新しい(nova) 星になる. この際, ヘリウムからできている白色矮星が関係し, それは連星系にあって質量を再捕獲し, そのことで表面が非常に熱くなり再び核燃焼が始まる. **超新星**は, その光度の増え方が通常の新星の光度の増え方に比べて何桁も上回るような星である. その増大率は $10^8$ 倍になることもある. 絶対光度 $L > 10^9\,L_\odot$ の超新星が観測されているが, その光度はその星を取り巻く全銀河の光度と比肩するほどである. 1054 年の有名な超新星は肉眼で日中に見えていた. 超新星の光学的強度は何ヶ月もの間に次第に弱まっていく. 瞬間的な輝きのほかに, ガスの殻が爆発的に ($10^4$ km/s の速度で) 外部に放出されるのが観測されている.

現象論的には, 超新星はタイプ I (光に変わる爆発エネルギー $10^{-5} \sim 10^{-4} M_\odot c^2$ と放出質量 $0.1 \sim 1\,M_\odot$) とタイプ II (光に変わる爆発エネルギー $10^{-6} \sim 10^{-5}\ M_\odot c^2$ と放出質量 $1 \sim 10\,M_\odot$) に分類される. この二つの区分はスペクトルの違いに基づいてなされ, タイプ II は水素原子の線を含み, 一方, タイプ I は含まない. 数え上げられる特徴は平均的なことであって, それぞれの事象はそれらから大きくはずれている可能性がある.

華々しい強度の増大には, 対応する劇的な説明が必要である. これに対しては星の崩壊がその役を果たす. というのは, その際に崩壊質量の数十%に至る重力エネルギーが解放されうるからである ((46.26) と比較してみよ). 現実的な超新星モデルでは, 解放される重力エネルギーのわずかな部分がい

かにして電磁波に変換されるか，しかも観測されるような放射強度の増大を生じさせるかを説明しなければならない．その上さらに，いかにしてその陥没（崩壊）が，電磁波放射とともに観測されている（ガスの殻の）爆発に導くのかを説明しなければならない．

VIII章で星の平衡に関してモデル的に考察したが，その考察に基づけば次の状況で星は崩壊することがわかる．

1. 電子の運動量が相対論的になって，そのフェルミ圧力が破綻するとき．この破綻の原因は反応
$$\mathrm{e}^- + \mathrm{p} \to \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e} \tag{47.37}$$
である．
2. 中性子のフェルミ運動量が相対論的になって，（中性子星の）中性子のフェルミ圧力が弱まったとき．この圧力は非相対論的な $P_\mathrm{mat} \propto \varrho^{5/3}$ から相対論的な $P_\mathrm{mat} \propto \varrho^{4/3}$ に移る．弱くなった $P_\mathrm{mat} \propto \varrho^{4/3}$ は，十分質量のある星では重力圧力を支えきれない．
3. $R \to (9/8)\, r_\mathrm{S}$ となって重力圧力が発散し，どんな物質の対抗圧力も破綻するとき．

この第 1 と第 2 の状況に関しては，その時々の静的な星のモデルで破綻に対する限界質量が存在した．第 3 の状況は，十分に重くて小さい星はその組成に関係なく崩壊するに違いないことを意味する．われわれの主たる関心は次にブラックホールへの崩壊，すなわち $R \le r_\mathrm{S}$ をもつ星に向けられる．

タイプ I と II の超新星のモデルは陽子と中性子，電子から成る星を出発点とする．このとき，重力収縮は相対論的電子運動量と（白色矮星に対して議論したように）反応 $\mathrm{e}^- + \mathrm{p} \to \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}$ に導く．それと結びついている電子のフェルミ圧力の破綻は崩壊を引き起こす．発生するニュートリノはただちに崩壊領域を飛び出し，そして重力崩壊の重要な信号となる．それは光学的放射に比べてほぼ $10^2$ だけ多くのエネルギーを運び去るはずである．このようなニュートリノ（19 事象）は，1987 年 2 月 23 日，大マゼラン星雲の超新星に対して初めて検出された[6]．この超新星はわれわれにもっとも近い隣接銀

[6] 訳注：日本のスーパーカミオカンデによる観測．

河（距離 50 kpc）にあり，タイプⅡであり，SN 1987 A と名づけられた．

超新星はおそらく謎に満ちたガンマ線バーストの原因[7]でもある．ほぼ1日に1回，天空に点状のガンマ線源がひらめく．その強度は他のすべてのガンマ線源を寄せ集めたくらいか，またはそれよりも大きい．このような**ガンマ線バースト**[8]は1967年以来観測されている．

タイプⅡの超新星のモデルでは，非常に重い，古い星（金属優位の内部核，$M \approx 10 \sim 30\,M_\odot$）の内部での重力崩壊を想定する．核融合燃焼の終わりが近づいて冷却が始まると熱の圧力が下がる．すると星の内部では，まず電子のフェルミ圧力が重力圧力と釣り合う．電子運動量が相対論的になると，フェルミ圧力は反応 $\mathrm{e}^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}$ によって破綻する．星の中核はほぼ 0.2 s で内側へ陥没する．陥没にともなう衝撃波が星の表面に到着したとき（2時間），その星はぱっと輝く．陥没の間に鉄より重い元素（たとえば鉛やウラニウム）の生成が起こり，その後に起こる爆発が宇宙（と地球）に見いだされる重い元素を放出する．崩壊の中心におそらく中性子星が残り，もっと重い初期質量($M \geq 30\,M_\odot$)に対してはたぶんブラックホールが残る．典型的な例は，1054年，中国の天文学者によって記録された牡牛座の超新星である．今そこに見えるカニ星雲は，噴出した質量から作られている．1000年の時が経つうちに，その星雲はほぼ3光年の半径をもつようになった．その中心にパルサー，すなわち中性子星が観測される．

これに対してタイプⅠの超新星のモデルは白色矮星を出発点とする．その矮星は（連星系における降着によって）質量が増大し，チャンドラセカールの質量限界に近づく．質量限界へ近づくにつれて電子の運動量は相対論的になる．またこの場合も，反応 $\mathrm{e}^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}$ が始まりフェルミ圧力の破綻につながる．対抗圧力がないために星は陥没する．比較的少ない初期質量 ($M \leq M_\mathrm{C} \approx 1.3\,M_\odot$) のために，この過程が中性子星あるいはブラックホールに導くことはありそうにない．たぶんこの爆発では，いかなる星も取り残されないであろう．

---

[7] J. H. Reeves et al., *The signature of supernove ejecta in the X-ray afterglow of the γ-ray burst 011211*, Nature 416 (2002) 512.

[8] 概略を知りたければ次を見よ，http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/know_11/bursts.html.

どの場合でも重力崩壊は超新星を生み出す過程になりうる．崩壊する星の核の考えられる最終状態は中性子星あるいはブラックホールである．他の銀河の超新星の観測からその頻度を評価でき，われわれの銀河では 10 年から 30 ごとに超新星の出現が期待できる．

## 演習

47.1: サイクロイド

$$ct = \frac{R(0)}{2\sqrt{k}}(\psi + \sin\psi) \quad \text{および} \quad R = \frac{R(0)}{2}(1 + \cos\psi)$$

は運動方程式

$$\left(\frac{dR}{d(ct)}\right)^2 = k\,\frac{R(0) - R(t)}{R(t)}$$

の解であることを証明せよ．

# 48 ブラックホール，準星

中心への重力崩壊はブラックホールに導く．われわれはこの崩壊と，結果として生じるブラックホールの観測可能性を調べる．そしてさらに，ブラックホールの実在性[9]に関する疑問を議論する．銀河の中心にあるブラックホールは準星（クエーサー）である可能性が高い．

## はじめに

ブラックホールというものは，領域 $r \le r_{\rm S} = 2\,G\,M/c^2$ に質量 $M$ の物質が集積しているものであるとわれわれは理解している．**ブラック**という呼び方は，星の表面からいかなる放射も外部へ抜け出してこないことによる．外部にいる観測者は，領域 $r \le r_{\rm S}$ からのいかなる種類の情報も得られない．その意味では，この領域は空間の**穴**である．

星が非常に重くかつ小さくなりうること，表面からどのような光も出てこないこと，という概念はすでにラプラス(P. S. Laplace)によってほぼ200年前に議論された．質量 $m$ の粒子の脱出速度 $v_{\rm fl}$ は条件 $E_{\rm kin} + E_{\rm pot} = m\,v_{\rm fl}^2/2 - G\,M\,m/R = 0$ から得られる．

$$v_{\rm fl}^2 = \frac{2\,G\,M}{R} \xrightarrow{R \to r_{\rm S}} c^2 \tag{48.1}$$

ニュートンと同じように，ラプラスも光は粒子から成っていると考えていた．この粒子の質量は未知であったが(48.1)には入らない．わかっている光の速度 $c$ から，ラプラスは正しい条件 $R = 2\,G\,M/c^2 = r_{\rm S}$ を導いている．

ブラックホールになるためには，上で述べた質量の集積がどのような臨界質量 $\varrho_{\rm cr}$ を取らなければならないかを見積もることにする．$R \approx r_{\rm S}$ と $r_{\rm S} = 2\,G\,M/c^2$，$M \approx (4\,\pi/3)\,\varrho\,R^3$ から $R$ と $r_{\rm S}$ とを消去すると

$$\varrho_{\rm cr} \approx \frac{3\,c^6}{32\,\pi\,G^3\,M^2} \approx 2 \times 10^{19}\,\frac{\rm kg}{\rm m^3}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \tag{48.2}$$

[9]新しい総合報告として，文献 10 に収められている B. Carr, *Black Holes in Cosmology and Astrophysics*, page 143-202 をあげておく．

になる．これまでに考えたもっとも密度の高い天体は中性子星であった．それは $M \sim M_\odot$ の質量と $\varrho \approx 6 \times 10^{18}\,\mathrm{kg/m^3}$ の密度，(43.9)，をもっている．

(48.2)によると，ごく普通の密度の場合でもその質量集積が桁はずれに大きいだけでブラックホールに成ることができる．たとえば，$M \sim 10^8\,M_\odot$ であれば $\varrho_{\rm cr} \sim 2\ \mathrm{g/cm^3}$ である．このような質量の集積は珍しいものではなく，目で見える宇宙にはほぼ $10^{11}$ の銀河があって，それぞれ $M \sim 10^{10}\,M_\odot$ の質量をもっている．たとえば，$M = M_\odot$ をもつ $10^{10}$ の数の星から，平均の星の距離 $R = 20\,R_\odot$ をもつ星の集合（クラスター）を作ることができる．するとこれは，$R \approx r_{\rm S} = 1.5 \times 10^{10}$ km をもつ天体となるであろう．このような**相対論的星の集合**の概念は，1965 年にゼルドビッチ(Zel'dovich)とポジュレッツ(Podurets)によって考えられた．

## 崩壊

47 節で超新星の生成について現象論的に述べたが，そこでは具体的な道筋を示すことはかなりむずかしいということが示唆されている．ここではブラックホールに至る崩壊を，非常に簡単化した前提(47.1)-(47.4)で調べる．すなわち，星は等方で一様かつ内部圧力は無視することにする．

47 節で利用された計量は一様な密度(47.4)の領域，すなわち星の内部に関連している．バーコフの定理により，崩壊している星の外部ではシュワルツシルト計量を使うことができる．合わせた空間を記述するために両方の計量を使い，それらを星の半径で結びつける．半径と時間座標はそれぞれ異なった意味をもっているので，別々の記号を使わなければならない．ガウス座標に対しては $\tau$ と $r'$ とを使う．

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 - R(\tau)^2\left(\frac{d{r'}^2}{1-k{r'}^2} + {r'}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right)\right) \qquad (r' \le r'_0) \tag{48.3}$$

シュワルツシルト計量は $t$ と $r$ とで示す．

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_{\rm S}}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{r_{\rm S}}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \qquad (r \ge r_0) \tag{48.4}$$

星の半径は $r'_0$ と $r_0$ とで表される．(48.3)に対しては一様な星の密度が仮定されている．すなわち

$$\varrho(r', \tau) = \begin{cases} \varrho(\tau) & r' \le r'_0 \\ 0 & r' > r'_0 \end{cases} \tag{48.5}$$

(48.3)から星の表面積 $F$ に対して $F = 4\pi {r'_0}^2 R^2$ が出るし，(48.4)から $F = 4\pi {r_0}^2$ が出る．（原理的に測定可能な）面積は，用いている計量には依存しない．よって

$$r_0(t) = r'_0 R(\tau) \tag{48.6}$$

が成り立つ．$r'_0 = \mathrm{const.}$ をもつ自由落下粒子のいる場所が星の表面である．ここで $r'_0 R(\tau) \to R(\tau)$ と規格化する．すると $R(\tau)$ は星の半径 $r_0(t)$ と等しくなる．さらに次の規格化を行う：$r'/r'_0 \to r'$，$k{r'}_0^2 \to k$．また(47.23)の $M_0$ の定義は $(4\pi/3)\rho(\tau)(r'_0 R(\tau))^3$ に変えられなければならない．崩壊の初めは，星の半径は 3 倍のシュワルツシルト半径であり，星の構成物質は静止しているものとする．すなわち

$$r_0(0) = R(0) = 3\, r_{\mathrm{S}}\,, \qquad \dot{R}(0) = 0 \tag{48.7}$$

(48.3)の定数 $k$ と(48.4)の $r_{\mathrm{S}}$ とは初期条件と星の質量から決められる．

$$r_{\mathrm{S}} = \frac{2\,G\,M}{c^2}\,, \qquad k \overset{(47.31)}{=} \frac{2\,G\,M_0}{c^2}\,\frac{1}{R(0)} \tag{48.8}$$

この際 $M$ は重力質量で，それは漸近的な重力場を定める．ここで $M_0 = 4\pi\,\varrho\,R^3/3$ であり，$R$ は上のように規格化された $R$ である．$R$ は星の半径であるので，$M_0$ が $M$ と同じものであるというのは当然である．

$$M_0 = M \tag{48.9}$$

まさに非ユークリッド計量と質量欠陥（40 節）のために実際は係数 1 の程度のずれはありうる．このようなずれは，結果には本質的な影響は及ぼさないであろう．よって(48.9)のこれ以上の理由付けはやめる．

(48.8) と (48.9) とから $k = r_{\mathrm{S}}/R(0)$ が出る．(48.7) から $R(0) > r_{\mathrm{S}}$ が成り立つ，すなわち $k < 1$ である．よって (48.3) の $dr'^2$ の係数 $1/(1 - k\,r'^2)$ にはどこにも特異点はない．すなわち

$$k\,r'^2 \le k = \frac{r_{\mathrm{S}}}{R(0)} < 1 \tag{48.10}$$

が成り立つ．$R(\tau)$ に対する解は (47.33)，(47.34) にあり，それはまた図 47.1 に与えられている．星の半径 $R(\tau)$ は単調に減少する．特異点 $R = 0$ には時間

$$T \overset{(47.36)}{=} \frac{\pi}{2}\,\frac{R(0)}{c}\sqrt{\frac{c^2\,R(0)}{2\,G\,M_0}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{R(0)}{r_{\mathrm{S}}}\right)^{3/2}\frac{r_{\mathrm{S}}}{c} = 8.16\,\frac{r_{\mathrm{S}}}{c} \tag{48.11}$$

の後に達し，その数値は $R(0) = 3\,r_{\mathrm{S}}$ に対してのものである．時間 $T$ は星の端にある粒子の固有時でもあり，それは粒子と一緒に自由落下する観測者の時間でもある．$r \sim r_{\mathrm{S}}$ に対しては，崩壊速度は光速程度である．崩壊の時間スケールはよって

$$\boxed{\text{崩壊の時間スケール：}\quad \frac{r_{\mathrm{S}}}{c} = \frac{M}{M_{\odot}}\,10^{-5}\,\mathrm{s}} \tag{48.12}$$

である．

物理学者の観測者は，もっと遠方から（無限の彼方に静止している時計の固有時間である）シュワルツシルト時間 $t$ を示す時計でその崩壊を観測したいであろう．$r \ge r_0$ に対してシュワルツシルト計量 (48.4) が成り立つ．星の端 $r_0(t)$ は同じく自由落下粒子の軌道でもある．このような粒子は有限の固有時 $\tau_1$，(45.7) で，$r_0(0)$ から $r_{\mathrm{S}}$ に落下する．(45.10) によって，対応しているシュワルツシルト計量時間 $t_1$ は無限である．よって (48.6) は，$\tau = \tau_1$ に対して

$$r_0(\infty) = R(\tau_1) = r_{\mathrm{S}} \tag{48.13}$$

となる．どのように星の端 $r_0(t)$ が $r_{\mathrm{S}}$ に近づくかもう少し正確に調べる．(45.10) から $dr/dt$ に対する表記を読み取り，星の表面にいる粒子にこれを

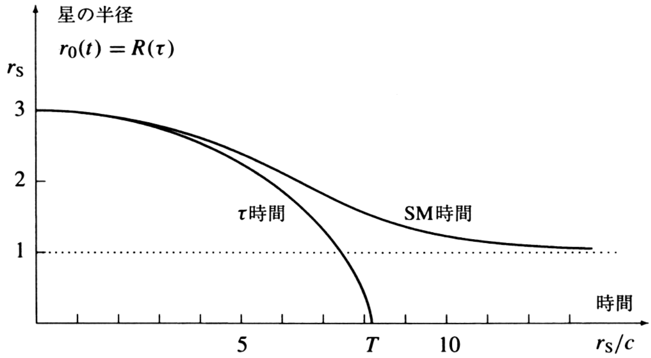



**図 48.1**: 初期に静止しかつ一様な粒子群の崩壊．星の半径の時間依存性はまず大きく離れ，かつ静止している時計の時刻 $t$（シュワルツシルト計量時間，SM 時間）に対して与えられ，一方星の端とともに動く時計の時刻 $\tau$ に対して与えられる．ともに動く観測者に対しては，崩壊は特異点に対応する時間 $T$ で終わる．外部の観測者にとっては，星は時間尺度 $r_S/c$ でシュワルツシルト半径に収縮し，そして消える．

適用すると

$$\frac{dr_0}{dt} = -\frac{c\sqrt{2\,(C + GM/r_0)}\;(1 - r_S/r_0)}{F} \overset{r_0 \to r_S}{\sim} -\frac{c}{r_S}\,(\,r_0 - r_S\,) \quad (48.14)$$

この式で無視された数値係数は 1 のオーダーである．(48.14) を積分すると

$$\ln\,(r_0 - r_S) \sim -\frac{c\,t}{r_S} + \text{const.} \quad (48.15)$$

となり

$$\frac{r_0}{r_S} \sim 1 + b\,\exp(-c\,t/r_S) \qquad (r_0 \sim r_S) \quad (48.16)$$

を得る．ここで $b$ は積分定数である．もっと正確な計算については演習 25.3 を参照すること．外から見ると，星の半径 $r_0$ は $r_0 \sim r_S$ になるやいなや指数関数的にゆっくりシュワルツシルト半径に近づく．それに対して数 $r_S$ から $r \sim r_S$ までは，崩壊の先端部分は時間スケール $t \sim r_S/c$ で進む．

ここで得られた星の崩壊に対する結果は，初期条件 $r_0(0) = R\,(0) = 3\,r_S$ に対して図 48.1 に描かれている．

$r_0 \to r_S$ のとき，星の端から出る光の赤方偏移は無限大になる．すなわち (12.9) と (48.4)，(48.16) とから

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - r_S/r_0}} - 1 \overset{r_0 \to r_s}{\sim} \exp\left(\frac{c\,t}{r_S}\right) \qquad \text{崩壊による赤方偏移} \tag{48.17}$$

を得る．星の表面から送り出された光子は，こうしてエネルギーを重力場中で急速に失う．それはまたますます大きくなる時間的な隔たりを越えて受信することでもある．というのは，シュワルツシルト計量の時間間隔

$$d\,t = \frac{F\,d\,\tau}{c\,(1 - r_S/r_0)} \overset{r_0 \to r_s}{\sim} d\,\tau\,\exp\left(\frac{c\,t}{r_S}\right) \tag{48.18}$$

は時間間隔 $d\,\tau$ にこのように対応しているからである．さてブラックホールに落ち込む光子を議論する．(25.25) と (25.24) から $\dot{r} = d\,r/d\,\lambda = \text{const.}$ と $d\,r/d\,t = \text{const.} \cdot (c/F)(1 - r_S/r)$ が出て，最終的に再び(48.16)となる（演習 25.3 も見よ）．外から観測すると，光子はこのように物質粒子と同じようにシュワルツシルト半径に漸近的に近づく．放射に対するエネルギー収支はエネルギー密度から出なければならない．$r$ 方向の物理的な光路長 $d\,s = d\,r/(1 - r_S/r)^{1/2}$ は振動数と同じように発散するので，個々の光子のエネルギーが発散するとき（$r \to r_S$ に対して）も光子の放射のエネルギー密度は有限である．

全体として崩壊は外部の観測者に対して次のように起こる．$r_0 \gg r_S$ である初期の組成の収縮は，まず赤方偏移 $z \ll 1$ をともなって非相対論的にゆっくり起こる．$r_0$ が数 $r_S$ に達するやいなや，重力場中で加速されて速度が相対論的になる．短い時間尺度 $r_S/c$ で星の半径 $r_0$ は $r_S$ のすぐ近くの値に達し星は見えなくなる．星の半径は指数関数的にゆっくり $r_S$ に近づくにもかかわらず，崩壊は突然の事象として現れる（たとえば，質量 $M \sim M_\odot$ の星に対して時間間隔 $T \sim 10^{-4}\,s$ で）．

この星の崩壊の記述は，1939 年にオッペンハイマーとシュナイダー(Snyder)によって与えられた．彼らの論文[10]の要約は次のようである．“すべての熱核融合のエネルギー源が尽きると大質量星は崩壊する．回転による分裂，質量の放出，放射による質量の吹き飛ばしが星の質量を太陽の質量の程度まで

[10] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, *On Continued Gravitational Contraction*, Phy. Rev. 56 (1039) 455.

減少させるのでなければこの収縮は際限なくつづき，…星の半径は漸近的に重力半径（$r_{\mathrm{S}}$）に近づく．星からの光はどんどん赤みがかり，…星の物質とともに動く観測者に対して崩壊の全時間は有限である…外部の観測者は星が漸近的に重力半径に収縮するのが見える．”

## ブラックホールの性質

### 観測可能性

(48.17)で基礎づけた観測不可能性は，このようにして生成されるブラックホールがスクリーンから消えてしまうと言っているわけではない．むしろ $r \geq r_{\mathrm{S}}$ の領域では崩壊の時間依存性に関係なくシュワルツシルト計量が成り立ち，したがって（星の形は見えなくとも）強い重力場という形で相変わらずその存在がわかる．さらに物質がブラックホールに落ち込むとき観測可能な効果が生じる．

ブラックホールは**事象の地平線**と呼ばれる閉じた面 $r = r_{\mathrm{S}}$ で取り囲まれている．外部の観測者はこの地平のこちら側（$r > r_{\mathrm{S}}$）で事象を見ている．外側から $r_{\mathrm{S}}$ に近づくにつれて光の赤方偏移が止めどなく激しくなるので，観測者にとっては領域 $r \leq r_{\mathrm{S}}$ は空（から）である．彼の計測では，事象の地平の面は $4\pi r_{\mathrm{S}}^2$ である．空（から）の空間の領域の直径または体積については，彼は何とも言えない．外部にいる観測者に対しては，特異点 $r = 0$ は原理的に観測不可能である．この限りでこの特異点はむしろ学問的な問題である．

### ホーキング効果

驚いたことに，孤立したブラックホールは**ホーキング(Hawking)効果**[11)]に基づいて放射を出す．ブラックホールに粒子が落ち込んでその反粒子が放射されるという過程を通じて，仮想的な粒子－空洞の組(pair)が強い重力場で実際に作られることが可能である．計算によると，その放射は質量に逆比例($T \approx (M_{\odot}/M)\, 10^{-6}$ K)する温度 $T$ で特徴づけられる．ブラックホールは光

[11)] S. W. Hawking, *Black hole explosions?*, Nature 248 (1974) 30.

子とニュートリノを放射し，それらの粒子のエネルギーはこの温度のプランク分布に従う．孤立したブラックホールはホーキング効果に基づいて連続的に質量を失う．$t \approx (M_\odot/M)\,10^{71}$ s の寿命の後，ブラックホールは（$T \to \infty$ による）激しい放射を止める．この爆発的な放射は検出されうるはずである．このようなブラックホールの終末が今日観測されるためには，その寿命が宇宙の年齢 $t_0 \sim 10^{10}$ 年より小さくなければならない．このような寿命 $t \sim t_0$ は，質量 $M \sim 10^{12}$ kg で大きさ $r_{\rm S} = 2GM/c^2 \sim 10^{-15}$ m の小さなブラックホールに対して得られる．このような小さいブラックホールはビッグバン（54 節）の際に生み出される可能性がある．

### エネルギー生成

ブラックホールに物質を送り込むと，外側から見ればその物質は漸近的にシュワルツシルト半径に近づく．その際に解放されるエネルギーの大きさを見積もると

$$\frac{|\,\text{重力エネルギー}\,|}{\text{静止エネルギー}} \approx \frac{GMm/r_{\rm S}}{mc^2} = 0.5 \tag{48.19}$$

となる．ニュートンの重力エネルギー $m\,|\Phi| = GMm/r_{\rm S}$ を使っているので，これは単に荒い見積もりである．$r_{\rm S}$ の点の重力エネルギーは特異ではなく連続的であるので，$r_{\rm S}$ への漸近的な接近はこの際何らの特別な意味をもたない．

ブラックホールの場合，重力エネルギーはまず運動エネルギーとして解放される．(48.19)によると，この運動エネルギーは静止エネルギーの50%程度にまで達する．この運動エネルギーは一般に，一部は外部から見ることができる放射に変えられる．現実的なモデル計算では，その変換率は静止質量の10%までになる．この率は核融合の率（$< 0.5\%$）をはるかに上回る．

この現象は時間スケール $r_{\rm S}/c$ で起こる．この後，物質（放射）はスクリーンから消え去る．すなわち，それは $r >_{\rm S}$ の領域では実際的にもはや検出できない．よって次のように言ってよい．すなわち，物質（光線）は（外から観測しているとシュワルツシルト半径に単に漸近的に近づくときも）ブラックホールに飲み込まれてしまう．

### 宇宙船はブラックホールに落ち込む

ブラックホールの中心に向けてたまたま落ち込む宇宙船を考える.（中心落下は，角運動量がゼロであることを意味する．角運動量がゼロでない場合は中心への落下と同様，双曲線状の軌道も可能である，25 節）．この宇宙飛行士が $r = r_S$ を通過する際の危険性を調べたい.

宇宙船の重心では重力と慣性力が相殺する．宇宙飛行士の体の中心が宇宙船の重心と重なれば全体として力は働かないのであるが，彼はその有限の大きさ（長さ）の体のせいで，重心から離れている部分が相殺されない力にさらされる．座っている宇宙飛行士の体の中心から $\Delta\ell \approx 1$ m 離れた部分を考えると，その 1 m のところの重力加速度 $a \sim GM/r^2$ の変化分は $\Delta a \approx (2GM/r^3)\,\Delta\ell = c^2\,\Delta\ell\, r_S/r^3$ である．よって残存加速度は，$r = r_S$ では

$$\Delta a \approx \frac{c^2\,\Delta\ell}{r_S^2} \approx 10^{10}\,\frac{M_\odot^2}{M^2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \begin{cases} 10^{10}\,\mathrm{m/s^2} & (M = M_\odot) \\ 10^{-10}\,\mathrm{m/s^2} & (M = 10^{10}\,M_\odot) \end{cases} \qquad (48.20)$$

である．もし $\Delta a = 10\ \mathrm{m/s^2}$ であるとすれば，宇宙飛行士の頭と脚が彼の（地球上の）重さに対応する力で引っぱられるということを意味する．それはけっこう強い，しかし我慢できる加重であろう．$M \approx M_\odot$ に対しては，$r = r_S$ におけるこの引き裂く力 $\Delta a \approx 10^{10}\,\mathrm{m/s^2}$ は致命的である（それは $r_S$ から上方へずいぶん離れたところでもすでに致命的である）．これに反して $M = 10^{10}\,M_\odot$ である超大質量ブラックホールの場合（たとえば相対論的な星群）は，宇宙飛行士は $r = r_S$ の場所を無事に通過できる．ただしこれは帰還のない旅である.

残存力が無視できる長さ $\Delta\ell$ は局所慣性系の大きさを定める．超大質量ブラックホールでは，宇宙船全体がこのような局所慣性系を表していることになる．それに反して $M \approx M_\odot$ のブラックホールでは，局所慣性系の大きさは非常に小さいであろう．形式的には，局所慣性系の大きさは(14.3)の形の展開が役に立つ近似となる領域である.

宇宙船は超大質量ブラックホールのうえに，すなわち局所慣性系に落ち込むと仮定しよう．そのとき，宇宙船内のすべての事象は重力がないかのよう

に進行する．特に（宇宙船を横切っていく）$r = r_{\mathrm{S}}$ の面は，宇宙船内の物理的な事象に対してけっして特別な影響は与えない．すべての事象は特殊相対論の法則に従って進行する．しかしながら，宇宙船が $r = r_{\mathrm{S}}$ を横断しようとする瞬間，宇宙船の後ろの部分（$r > r_{\mathrm{S}}$）から地球に向けて発信される信号はまさに理論的に重大な事象となることだろう（赤方偏移が大きくて実際に受信できるかどうかは確かではないが）．このように $r_{\mathrm{S}}$ が際立つのは，外部の観測者と接触（情報の交換）するときだけである．

## 無毛仮説

われわれの具体的な計算は**球状の**星の崩壊に関係している．崩壊の後，外部空間の場はパラメター $M$（ブラックホールの質量）だけで定められているし，もともとの半径密度分布が一様でないときでも成り立つ．他のすべての情報（たとえば物質の組成についての情報）は失われてしまう．1965 年，ウィーラー(Wheeler)は，一般にブラックホールは獲得した質量 $M$ と角運動量 $L$，荷電 $\mathcal{Q}$ だけで決まってしまうと推測した．このいわゆる**無毛仮説**は，それ以来いろいろな場合に立証された．それは，すべての可能な構造（非一様性，多極モーメント，まさに“髪の毛”）は，崩壊によっていわば平らにされるということを意味する．具体的には，質量分布の高次の多極モーメントは重力波放射で消滅する．生じた状態は $M$ と $L$，$\mathcal{Q}$ を除いては星の前歴にはまったく依存しない．そして $M$ と $L$，$\mathcal{Q}$ は外部空間の計量を定める．

## カー計量

シュワルツシルト計量は $M \neq 0$ と $L = 0$, $\mathcal{Q} = 0$ に対して成り立つ．$L \neq 0$ に対しては場の方程式の軸対称**カー(Kerr)計量**(1963)解があり，それをここに導出なしに与える．

$$ds^2 = -\frac{d^2}{\rho^2}\left(c\,dt - b\,\sin^2\theta\,d\phi\right)^2 + \frac{\rho^2}{d^2}\,dr^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(\left(r^2 + b^2\right)\,d\phi - b\,c\,dt\right)^2 \qquad (48.21)$$

ここで $d^2 = r^2 - r\,r_\mathrm{S} + b^2$ と $\rho^2 = r^2 + b^2 \cos^2\theta$, $b = L/(M\,c)$ である．$L \to 0$ に対しては（すなわち $b \to 0$），カー計量はシュワルツシルト計量に帰着する．

あまり大きくない $L$ に対してカー計量は，シュワルツシルト計量と同じくブラックホールの事象の地平のような閉じた面を作り出す．この地平は場の方程式による不可避の特異点（ペンローズ(Penrose)とホーキングの特異点定理，1965 年）を外部から遮る．そのかぎりでは，特異点は学問的であり無害である．しかしながら，遮蔽されない（裸の）特異点をもつ解もあり，それがもたらすものと評価は問題である．これに対しては，そのような裸の特異点を禁じる“宇宙検閲仮説”が提案された（ペンローズ，1969 年）．ことによると，実際に重力崩壊を引き起こすような初期条件だけが遮蔽された特異点に導くのかもしれない．

## ブラックホールは存在するか？

“ブラックホールは存在するか？”という疑問は二通りの意味をもちうる．まず，星は一般相対論で計算されるように点状の特異点で終わるのか？ プランク長(22.31)による原理的な限界のためにきっと“いいえ”と答えるであろう．しかし何よりもこの疑問は，事象の地平の内部は観測できないのであるから，実のある学問的議論にならないおそれがある．2 番目は，その表面から光が外へ出てこれないほど小さくて密度の高い（コンパクト）な物体があるのか？ 答えは“はい，考えられます”．以下で，今述べた疑問をこの視点から考察する．これに対してまず理論的な考察を議論し，そして実験的なヒントを議論する．

理論的な考察はブラックホールに成りうるような構造の星をもとにして進める．$R \sim 3\,r_\mathrm{S}$ である星（パルサー）の存在は経験的によく裏づけられているし，$R \to 9\,r_\mathrm{S}/8$ になると重力圧力は発散するので，どんな機構も大質量星の崩壊を妨げることはできないだろう．$M \geq 30\,M_\odot$ の星の重力崩壊の際にブラックホールが残されるというのは，受け入れられている考えである．

さらに加えて個別の星が非常にたくさん集まる場合，(48.2)によって，そ

の集合はごく普通の密度で半径 $R \sim r_S$ となる．このような相対論的な星群に対して，$R \leq r_S$ への崩壊を押しとどめることができるどんな予期しない効果（極端な密度の星に対してひょっとしてあるかもしれない）も想像できない．このような天体は超大質量ブラックホールになるだろう．同じような最終状態は，普通のブラックホールが継続的に物質を取り込むことによっても生じる．

ブラックホールになることができる別の構造は連星パルサーである．重力波放射によって両中性子星は有限の巻き込み時間（36 節）の後，互いに落ち込む．合体した質量は一般に中性子星の質量上限を超える．その結果，天体の大きさは数シュワルツシルト半径程度になり，$r \leq r_S$ の天体へと押しつぶされるであろう．

ブラックホールの観測は原理的には非常に簡単である．領域 $r > r_S$ にごくわずかの質量密度をもつ球対称の重力場を計測することである．しかし実際には，このような検出は間接的にのみ可能である．

ブラックホールのよい候補は連星系**シグナス**(Cygnus) $X-1$ であり[12]，それは見える星（$M \approx 8\,M_\odot$）と見えない星（$M \approx 4\,M_\odot$）から成り立っている．見えない相手は見える星の光のドップラーシフトからその存在がはっきりわかり，そしてこのドップラーシフトはいっしょの重心を回る運動によって引き起こされるのである．ブラックホール（見えない星）が見える相手から連続的に物質を吸い取っているというモデルで，シグナス $X-1$ から放射されている X 線は非常によく説明される．ブラックホールへの落下の際にこの物質は X 線を放射する．

## クエーサー（準星）

銀河の中心の大きなブラックホールはいわゆる**クエーサー**（準星的電波源）である可能性が高い．

長い間知られていた電波源が，60 年代に初めて可視天体として分類されることが決まった[13]．この天体の光はよく大きな赤方偏移を示す（今日では

[12] 訳注：Cygnus= 白鳥座．
[13] C. Hazard et al., Nature 197 (1963), M. Schmidt, Nature 197 (1963) 1040.

$z \lesssim 5$ までのクエーサーが観測されている）．この赤方偏移は，この天体が非常な遠距離（50 節）にあるということと，これにともなって非常に強い絶対光度をもっているということを推測させる．この絶対放射パワーは，年間当たり数倍の太陽質量を 10%の効率でエネルギーに変換する何らかの機構を必要とする．問題のクエーサーは，このことから非常に大きな質量集積（ほぼ $10^6 \sim 10^{10}\,M_\odot$）ということになる．通常の銀河（ほぼ $10^{10}\,M_\odot$ をもつ）は，必要とされる放射パワーの 1%以下しか放射しない．さらに加えて，クエーサーからの放射は $\Delta t \sim 1\,\mathrm{d}$ の時間的な変動を示す．これによって，この天体は 1 光日より小さいと考えざるをえない．（比較のために：天の川の直径は $10^5$ 光年である）．したがって，この対象は光学的に分解されなくて，星のように点の形に見える．すなわち星に準ずるから準星である．

クエーサーは非常に大きいエネルギー変換率をもっているので，その正体は銀河の中心にある質量 $M \approx 10^6 \sim 10^{10}\,M_\odot$ の大きなブラックホールであるというのが考えられるモデルである．ブラックホールはその周辺から物質を吸い取ることができるであろう．その物質は降着円盤に集まっていて，少しずつ中心にあるブラックホールに連続的に落ち込んでいる．シュワルツシルト半径に近づくと物質は強く加速される．加速され電離された物質は電磁波を放射する．このように，クエーサーのエネルギー生産は周りの銀河からの連続的な物質吸収によって直接まかなわれる．解放されるエネルギーは(48.19)に見積もられているが，それにつづく放射へのエネルギー変換効率は核融合の場合の変換効率をはるかに上回る．

クエーサーの本当の性質は今日でも最終的に解明されたとは言えない．銀河の内部のブラックホールというのがもっともありうることであるが，それも唯一の可能なモデルではない．そして他の超大質量の天体も収縮あるいは物質再獲得によって連続的なエネルギー生成に導く．このモデルには数 $r_\mathrm{S}$ の半径をもつ星群あるいは超大質量星が必要である．ここで言う**超大質量星**とはいわゆるプラズマから成る非常に重い星で，その内側では光子の放射圧力が重力圧力と釣り合っているような星である．

## 天の川の中心のブラックホール

クエーサーは若い銀河で，しばしば現れる現象である．ブラックホールが銀河で生まれるやいなや，それは周りから物質を捕獲しクエーサーになる．古い銀河は一つあるいはもっと多くの大きなブラックホールを比較的希薄な周辺にもっているようである．

銀河の質量分布は星の速度から定めることができる．このために，銀河内の一つの星の運動に対して簡単化のために円軌道（半径 $d/2$，速度 $v$）を想定する．重力と遠心力との釣り合いから $GM = v^2\,d/2$ が出る．ここで $M$ は領域 $r \le d/2$ のなかの質量である．それぞれの星の $d$ と $v$ との計測から $M = M(d)$ を得る．この際，観測の方向に垂直な速度は直接に観測できるが，それに平行な速度はドップラーシフトのために間接的になる．

天の川の中心には Sgr A*（あるいは Sagittarius A*）と名前がついている電波源がある[14]．すぐ隣の星の速度の計測から

$$M \approx 3 \times 10^6\, M_\odot \quad \text{あるいは} \quad r_\mathrm{S} \approx 10^7\ \mathrm{km} \qquad (\mathrm{Sgr\,A^*}) \tag{48.22}$$

であることがわかる[15]．チャンドラ X 線観測所によって，X 線の領域で Sgr A* からの短時間のシンチレーションが観測された[16]．この標識灯火は，たとえばブラックホールによって捕獲されたガスの塊によって発せられる．この長時間つづく標識灯火は $\tau \approx 10$ 分の中断を示す．ある天体が $\tau$ という時間的変動を示すためには，その大きさは $c\tau$ より小さくなければならない．それで条件 $2R < c\tau$ から

$$R < 10\, r_\mathrm{S} \qquad (\mathrm{Sgr\,A^*}) \tag{48.23}$$

が出る．よって Sgr A*（というか，この場所に見いだされた天体）は，非常にコンパクトなので $R > r_\mathrm{S}$ である平衡状態はありそうにない．したがって，Sgr A*は大質量ブラックホールと推定される．

---

[14] 訳注：Sagittarius ＝射手座．

[15] A. Eckart et al., *Stellar Orbits Near Sagittarius A**, ⟨www.arxiv.org⟩ arXiv:astro-ph/0201031. 概論として：A. Eckart and R. Genzel, *Erster schlüssiger Beweis für ein massives Schwarzes Loch ?*（大質量ブラックホールに対する初めての決定的な証拠？），Physikalische Blätter 54（1998）25.

[16] F. K. Baganoff et al., *Rapid X-ray flaring from the direction of the supermassive black hole at the Galactic Centre*, Nature 413（2001）45.

# X　宇宙論

## 49　宇宙原理とロバートソン−ウォーカー計量

宇宙の動力学は，重力場とその源の動力学のために広大な領域で展開される．われわれは，ここで宇宙に対するもっとも単純なモデルを表すロバートソン(Robertson) − ウォーカー(Walker)計量を議論する．この計量は，宇宙の質量分布は平均として一様で等方であるとの前提に基づいている．

われわれは通常，今見えている領域を宇宙と呼んでおり，この領域からだけ直接的な情報を手に入れることができる．目に見えない宇宙について何か述べることはありうるであろうが，どうしても外挿的に推測することになる．

見通しを得るために，最初にいくつかの数値と概念を導入することにしよう．われわれにとって見える宇宙の領域はほぼ $1.3 \times 10^{10}$ 光年の半径をもっている．そのなかにおおよそ $10^{11}$ の銀河（星系）がある．多くの銀河は $10^9$ から $10^{12}\ M_\odot$ の範囲の質量をもっている．われわれ自身の銀河—天の川—は，ほぼ $10^{12}$ の太陽質量とほぼ $10^5$ 光年の直径（銀河面で）をもっている．銀河は群または団を形成しており，銀河団はほぼ 200 個の銀河を含み，その大きさは $10^7$ 光年である．われわれの天の川は小さな群の一部であり，その群（局所銀河群）はほぼ 20 個の銀河でできている．

宇宙のモデルでは，時間的な進化と宇宙の構造が，長大な長さの尺度で記述される．すなわち，われわれはある長さの尺度（たとえば $10^8$ 光年）以内

の詳細には興味がない．この荒っぽい見方は，われわれが現実に関係している問題をすべて消してしまう．このかぎりでは，“宇宙モデル”と“宇宙の状態”という表現は何とも思い上がった言い方である．

われわれの観測によると，宇宙は平均として等方で一様である．平均としてということは，（たくさんの銀河を含む）大きな空間領域で平均されるということを意味する．これによって，特に密度 $\varrho$ は（近似的に）一様である．等方であるということは，観測点から見た平均速度はその点が中心となるような方向性をもっているということを意味する．われわれの観測には制限がありかつ不確実性を含んでいる．その上，観測は宇宙のわれわれに見える領域だけに限られる．いろいろと引き合いに出した観測事実を一般化すると次の**仮説**に到達する．

**宇宙原理：**

宇宙ではすべての場所と方向は同等である．

この仮説は宇宙の空間構造に，すなわち求める計量に強い制限をつける．宇宙原理の一様性と等方性の要請を満たす計量は**ロバートソン−ウォーカー計量**である．

ロバートソン−ウォーカー計量：

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\,\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right)\right) \tag{49.1}$$

われわれはこの形の計量を(47.20)からそのまま引き継ぐ．そこでは，この形は等方かつ一様な星の密度分布に対して導かれた．よって，それは星の内部でだけ成り立った．一様な密度分布が全空間に広がっているときは，この計量はその制限なしに成り立ち，ロバートソン−ウォーカー計量と呼ばれる．制限を廃止すると，はるかに強い対称性が生じる．以前，星は中心に関してだけ等方であったのに，今やすべての点に対して等方性は成り立つ．

宇宙原理から(49.1)を直接的に導出する標準的方法は次のとおりである．空間的な一様性と等方性のために，3 次元曲率は空間的に一定である．すなわち，3 次元部分空間で空間的に一定な曲率を記述する計量が求められる．こ

のような部分空間は極大対称であると呼ばれる．具体的に説明するためにより少ない空間次元を考える．そうすると極大対称面が見つかるだろう．三つのこのような面が存在する．すなわち一定の正と，ゼロと負の曲率をもつ面である．これらは球面と平面，擬球面である．これらの面上のどの点も他の点と同等である．これに類似して三つの極大対称 3 次元空間がある．それらは $k>0$ と $k=0$，$k<0$ をもつ計量の空間部分で書き表される．

(49.1) の座標の意味は 46 節で詳細に議論された．そこでは粒子（星，塵（ダスト））が緩やかに集まった星が考えられた．自由落下する粒子の半径方向軌道は，軌道 $x^i_\nu = \text{const.}$ で記述された．ここで $\nu$ は粒子の番号である．粒子に結びつけられた時計は時刻 $t_\nu$ を示す．これらの考察を今や宇宙に転用する．そこでは，粒子は銀河に置き換えられ，制限 $r \le r_0$ ははずされる．軌道 $x^i_\nu = \text{const.}$ は運動方程式の特殊解である．これらの軌道は（$\theta_\nu = \text{const.}$ と $\phi_\nu = \text{const.}$ によって）今や半径方向に走っており，その半径方向速度は $R(t)$ の時間依存性だけから出てくる．

座標は事象に名前をつけるのに使われる．ある特定の領域に軌道 $x^i_\nu = \text{const.}$ とその時々の銀河時間 $t_\nu$（$\nu = 1, 2, \ldots, N$）をもつ $N$ 個の銀河があるとする．すると，ある特定の事象が時間 $t = t_\mu$ と座標 $x^i = x^i_\mu$ とをもつとすれば，この $\mu$ はまさにその事象の時間と場所に対応した銀河である．座標網を密にしたければ銀河以外に星を補充して考えればよく，それらの星は銀河と同じく，宇宙の重力場のなかで落ち込んでいく．

ロバートソン－ウォーカー計量の座標の意味について，次のように再確認する．

$$\text{典型的な銀河:}\quad \text{軌道:}\ x^i = \text{const.}\,,\quad \text{時間:}\ t \tag{49.2}$$

‘典型的な’銀河というのは特別な固有運動をしていない，むしろ運動は $R(t)$ だけによって定められるような銀河を意味している．

軌道 $x^i = \text{const.}$ からのずれは，たとえばある銀河が銀河群の周りを回ることから生じることがあり，これもまた重力場への自由落下である．しかし，この追加の運動を引き起こす銀河群の局所重力場は計量 (49.1) では記述されていない．（似たようなことは銀河の内部の星に対しても成り立ち，その

自由落下は $x^i=\text{const.}$ の形の軌道では記述されない)．宇宙原理はしかし，$x^i=\text{const.}$ を逸脱するような固有運動は平均すると相殺されることを示唆している．

(49.1) で $R(t)$ は長さの次元をもつべきであり，よって $r$ と $k$ とは無次元である．$r$ の尺度を変えることで，パラメター $k$ を

$$k=0,\ +1 \text{ または } -1 \tag{49.3}$$

に制限することができる．3 次元部分空間 $(i=1,2,3)$ で，$g_{ij}$ からスカラー曲率 $R^{(3)}$ を計算すると次のようになる．

$$R^{(3)}=R_i{}^i=\frac{6k}{R(t)^2} \tag{49.4}$$

この曲率は場所には依存しない．$k=\pm1$ に対しては，$R(t)$ は 3 次元空間の曲率半径の意味をもっている．平坦な空間では $k=0$ であり，座標 $r$ の尺度の変更は必要ない．この場合，係数 $R(t)$ の意味は $r$ の意味に依存する．平坦な空間で，たとえば天の川の中心を座標値 $r=0$ に取ることができ，乙女座団の中心を $r=1$ に（そして特定の $\theta$ と $\phi$ 値を）とることができる．すると $R$ は，これらの場所の間の物理的な間隔（時間にして $6\times10^7$ 光年）と等しい．

定まった座標値をもつすべての 2 点間の空間的な距離は $R(t)$ に比例する．特に，これは二つの典型的な銀河の間の距離に対して成り立つ．よって $R(t)$ は，**宇宙スケール因子**と呼ばれている．$k=\pm1$ に対して $R(t)$ は，すでに述べたように宇宙の曲率半径でもある．$k=1$ に対して $R(t)$ は，（この場合は有限な）宇宙の半径でもある．

## ロバートソン―ウォーカー計量の議論

ロバートソン－ウォーカー計量の議論のために極大対称面，すなわち一定曲率の面を考える．簡単化のために正の一定値の曲率，すなわち半径 $R(t)$ の球面から始める．球面の線素 $ds$ は

$$ds^2=R(t)^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right)=R(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-r^2}+r^2\,d\phi^2\right) \tag{49.5}$$

となる．左辺の表示は無次元の座標

$$r = \sin\theta \tag{49.6}$$

を $\theta$ の代わりに導入すると得られる．$\theta$ の値は 0 から $\pi$ まで動き，$r$ の値は

$$0 \leq r \leq 1 \tag{49.7}$$

の範囲を 2 度動く．$r = 1$ に対しては，計量係数 $g_{11}$ は特異になる．しかし，空間はこの場所で他のどの場所とも同じ性質をもつ（$r = 0$ が北極であるときは $r = 1$ は赤道である）．よってこれは座標上だけの特異点である．

ロバートソン－ウォーカー計量の空間部分の線素 $d\sigma$ は

$$d\sigma^2 = R(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2 \right) \right) \tag{49.8}$$

である．$k = 1$ に対しては，球面 (49.5) に対する類似は明らかである．今，線素 (49.5) を一般化する．そこではロバートソン－ウォーカー計量の場合と同じように係数 $k$ をつけておく．

$$ds^2 = R(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2\, d\phi^2 \right) = R(t)^2 \left( d\chi^2 + f(\chi)^2\, d\phi^2 \right) \tag{49.9}$$

与えられた両表示は変換

$$r = f(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & (k = 1) \\ \chi & (k = 0) \\ \sinh\chi & (k = -1) \end{cases} \tag{49.10}$$

で互いに結びつけられる．$k = 0$ に対しては，(49.9) は平面の計量である（極座標 $\rho = \chi$ と $\phi$ とをもつ）．$k = 1$ に対しては，(49.9) は球面の計量である（角度座標 $\theta = \chi$ と $\phi$ とをもつ）．$k = -1$ に対しては，(49.9) は擬球面の計量である（距離座標 $\chi$ と角度座標 $\phi$ をもつ）．**擬球面**は，いずれの場所でも負の一定曲率 $-1/R^2$ をもっていることを容易に調べることができる．球面とは違って擬球面を 3 次元空間に埋め込むことはできない．しかし局所的には擬球面は双曲面で近似される．一定曲率をもつ双曲面は存在しないのであるから，これは単に局所的なことである．

さて，置き換え(49.10)をロバートソン－ウォーカー計量の線素に代入する．

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2\,dt^2 - R(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right)\right) \\ &= c^2\,dt^2 - R(t)^2\left(d\chi^2 + f(\chi)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right)\right) \end{aligned} \tag{49.11}$$

この表示で，ロバートソン－ウォーカー計量と極大対称面の計量(49.9)との間の類似は明白である．両方の場合で，$\chi$ 座標の可能な値は

$$k = 1\ \text{に対して}\ 0 \le \chi \le \pi\,, \qquad k = 0\,, -1\ \text{に対して}\ 0 \le \chi \le \infty \tag{49.12}$$

である．

2 点間の距離を定めるために最初の点を座標原点 $\chi = 0$ に置くが，空間の一様性のためにこのことは一般性の制限にはならない．それで座標 $\chi \neq 0$ である 2 番目の点への距離 $D$ は

$$D = \int_0^{\chi} d\chi'\,\sqrt{g_{\chi\chi}} = R(t)\,\chi \tag{49.13}$$

である．距離は最短距離に沿って測れるのであるから，考えている経路に対しては(49.9)で $d\phi = 0$ が成り立つか，(49.11)で $d\theta = 0$ と $d\phi = 0$ とが成り立つ．よって $\chi$ を距離座標と考えることができるし，一方 $R(t)$ はスケール因子の役割をもつ．

## 曲率の効果

曲率の議論のために，与えられた点から同じ距離 $D$ をもつすべての点の軌跡を考える．この軌跡の囲む面積を計算し，それを距離に関連させる．

まず面(49.9)から始めるが，それは $k$ の値に従って球面あるいは平面，擬球面である．$\theta = 0$ からの距離 $D = R\theta$ をもっている点は，円となる線を形作る．円周（線の長さ）に対して

$$\frac{\text{周長}}{D} = \frac{\int d\phi\,\sqrt{g_{\phi\phi}}}{D} = 2\pi\,\frac{f(\theta)}{\theta} = 2\pi\,\frac{f(D/R)}{D/R} \tag{49.14}$$

が成り立つ．平面（$k = 0$）に対しては，円に対するよく知られた比率 $2\pi$ がもたらされる．球面（$k = 1$）に対しては，その値は $2\pi$ より小さい．擬球面

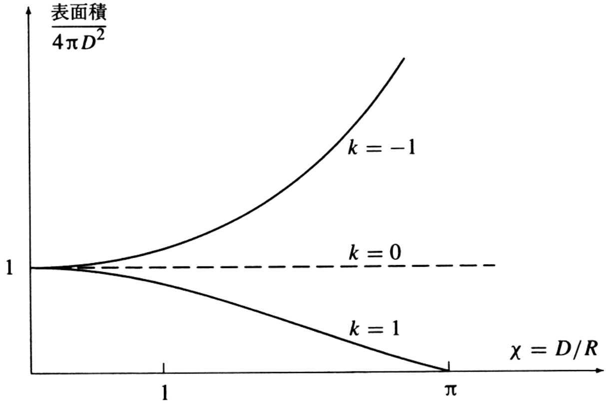



**図 49.1**: 3 次元部分空間のロバートソン－ウォーカー計量（(49.8)）では，ある与えられた点からの距離 $D$ をもつすべての点の集合は面である．小さな距離に対しては，この面の面積はユークリッド空間の値 $4\pi D^2$ に等しい．図は，この値からのずれが曲率 $+1/R^2$ と $-1/R^2$ およびゼロに対して距離の関数として示されている．

$(k=-1)$ に対しては，局所的に双曲面で置き換えられる．よってその比は，$2\pi$ より大きいということが直観的に理解される．

（滑らかにした）地表面で $2\pi$ からのずれを容易に測ることができる．それで，たとえば北極から $D=\pi R/2$ の距離をもつすべての点の軌跡は赤道である．この“円”の周長は $2\pi R=4D$ であり，ユークリッドの値 $2\pi D\approx 6.3D$ より小さい．周長/距離は，球面上に住んでおり，その想像できる世界が 2 次元であるカブトムシが決めてくれる．このことは，曲率というものは面の内部で測るとはっきりと現れる面の内部の性質であるということを意味している．われわれの 3 次元空間の曲率はことによるとゼロではないかもしれないが，それを測るとき，われわれはこのカブトムシと類似の状態になる．われわれは曲率を測ることはできる（少なくとも原理的には）が，4 次元空間の埋め込みによって思い描くのではない．

さて，ロバートソン－ウォーカー計量(49.11)で $\chi=0$ からの距離 $D=R\chi$ をもっている面を考える．$k=1$ に対しては，これは球面である．この面の面積に対して

$$\frac{\text{面積}}{D^2} = \frac{\int\int dx^2\,dx^3\,\sqrt{|g_{22}\,g_{33}|}}{D^2} = 4\pi\,\frac{f(\chi)^2}{\chi^2} = 4\pi\left[\frac{f(D/R)}{D/R}\right]^2 \qquad (49.15)$$

が成り立つ．ユークリッド値 $4\pi$ からのずれは図 40.1 に示してある．$x = D/R \to 0$ に対して $f(x)/x \to 1$ が成り立つので，小さな距離 $D \ll R$ に対してずれはわずかである．

## 曲率の直接測定

3 次元空間の曲率を（原理的に）測る方法を簡単に述べる．そのために，まず同じ絶対光度をもつ銀河をすべて選び出す．ある放射パワー（または絶対光度）の銀河が(49.15)で考えた距離 $D$ の面上にあるとする．距離が $D$ である銀河の実視光度 $\ell = \ell(D)$ は，よって

$$\frac{1}{\ell(D)} \propto \text{面積}\,(D) = 4\pi\,R(t)^2\,f\,(D/R)^2 \overset{k=0}{=} 4\pi\,D^2 \qquad (49.16)$$

から与えられる．最初に選び出した銀河のうちから実視光度 $\ell > \ell(D)$ をもつ銀河の数 $N\,(D)$ は，距離 $D$ の内部の銀河の数に等しい．

$$N\,(D) \propto \text{体積}\,(D) = 4\pi\,R(t)^3 \int_0^{D/R} d\chi\,f\,(\chi)^2 \overset{k=0}{=} \frac{4\pi}{3}\,D^3 \qquad (49.17)$$

(49.16)を $D = D(\ell)$ について解きそれを(49.17)に代入すると，$\ell$ より大きな実視光度をもつ（しかし同じ絶対光度の）すべての銀河の数 $N(\ell)$ を得る．関数 $N(\ell)$ は原理的に観測で定めることができる．それで次の値

$$k = 0 \quad \text{に対して} \quad N\,(\ell) \propto \ell^{-3/2} \qquad (49.18)$$

からのずれを調べれば，3 次元空間の曲率を推定することができる．

ここで与えた議論はきわめて簡単化されたモデルに基づいていて，実際は数多くの修正が加えられる．銀河の絶対光度の分布と宇宙赤方偏移，宇宙の膨張が考慮されなければならない．それらと結びついた不確実性のために，宇宙の曲率のこのような比較的直接的な決め方はまだ行われていない．

## 有限でかつ境界のない宇宙

$k=1$ に対しては，体積は**有限**である．空間の 2 点間の極大距離は $\pi R(t)$ に等しい．まず 2 次元空間の体積 $V^{(2)}$ を (49.9) によって計算する．

$$V^{(2)} = \int dx^1 \int dx^2 \sqrt{|g_{11}\,g_{22}|} = 2\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{R(t)^2\, r}{\sqrt{1-r^2}} = 4\pi R(t)^2 \tag{49.19}$$

$r=\sin\theta$ と $0 \le \theta \le \pi$ のために，$r$ は 0 から 1 とそして 1 から 0 をとり，これは係数 2 を導く．ロバートソン－ウォーカー計量 (49.11) で表される 3 次元部分空間の体積 $V^{(3)}$ を同じようにして計算すると

$$\begin{aligned} V^{(3)} &= \int dx^1 \int dx^2 \int dx^3 \sqrt{|g_{11}\,g_{22}\,g_{33}|} \\ &= 2\int_0^1 dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{R(t)^3\, r^2\,\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi^2 R(t)^3 \end{aligned} \tag{49.20}$$

を得る．球面は有限の面積 (49.19) をもつ．しかしそれは境界がない．これに類似して，正の一定の曲率をもつ 3 次元の空間は，有限の体積をもつが境界がない．

宇宙に境界はないが有限で広大であると一般相対論は示唆しているが，これは重大な認識である．この宇宙の計量は $k=1$ と $R(t)$ に依っており，すでに見たように半径 $R(t)$ をもつ球面のそれと緊密な類似性がある．そして，膨らみつつある（球状の）風船が膨張している宇宙に対応している．典型的な銀河は $x^i = \mathrm{const.}$ をもっているが，それは風船のうえにつけられた点に対応している．風船の膨らみは点（銀河）の間の相対速度をもたらすが，それは $R$ に比例する．ある点から見ると他の点は方向は変わらず距離だけが増え，その後退速度は距離とともに増大する．

# 50　赤方偏移と距離の関係

ロバートソン－ウォーカー計量(RWM)のスケール因子 $R(t)$ の時間依存性は宇宙赤方偏移を引き起こす．この赤方偏移は，はるか遠方の銀河の光で観測される．われわれは，この赤方偏移と源までの距離との関係を定める．

半径 $R(t)$ をもつ球面を想像してみよう．ここで $\dot{R}(t) > 0$ であり，具体的には，たとえば膨らみつつある風船を考える．ある座標値と $R(t)$ に比例する速度をもつ二つの任意の点（すなわち風船のうえに印をつけられた 2 点）は互いに遠ざかる．これらの点の間で取り交わされる信号はドップラーシフトと理解される赤方偏移を受ける．これは $\dot{R}(t) > 0$ をもつロバートソン－ウォーカー計量に対しても同様に成り立つ．

宇宙赤方偏移がドップラーシフトとして説明されることは通常のことであり，あまり大きくない距離に対しては正しい．しかし実際は，この説明は首尾一貫していない．すなわち，ドップラー効果は特殊相対論で計算され，源と受信者が特定の場所と速度をもっている慣性系が前提となる．しかしこのような慣性系の前提は，宇宙的な距離に対しては適用されない．ロバートソン－ウォーカー計量では，局所慣性系が存在するだけである（$R(t) = \text{const.}$ かつ $k = 0$ の場合は別にして）．

正確でかつ同時に簡潔な宇宙赤方偏移の取扱いは，ロバートソン－ウォーカー計量に基づいてなされる．

二つの典型的な銀河を考えると，宇宙の重力場で（すなわちロバートソン－ウォーカー計量で）それらの軌道は $x^i = \text{const.}$ で与えられる，(49.2)．これらの銀河の運動は $R(t)$ の時間依存性によって定められる．銀河の一つから時刻 $t_1$ に光が放射され，別の銀河がその光を時刻 $t_0$ に受光したとする．一般性を失うことなしに一様性と等方性によって光の軌道を考えることができる．その光は一定の $\theta$ と $\phi$ で，$\chi(t_1) = 0$ から $\chi(t_0) = \chi$ へと飛んでいく．このような光の軌道に対して

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R(t)^2\,d\chi^2 = 0 \quad \text{あるいは} \quad d\chi = \frac{c\,dt}{R(t)} \tag{50.1}$$

が成り立つ．二つの連なった波の山を考える．それらは源から受信者まで同じ道 $\chi$ をたどる．

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{R(t)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{c\,dt}{R(t)} \tag{50.2}$$

これから次が出る．

$$0 = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{c\,dt}{R(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{c\,dt}{R(t)} = \frac{c\,\delta t_0}{R(t_0)} - \frac{c\,\delta t_1}{R(t_1)} \tag{50.3}$$

波の山の間の時間差 $\delta t$ は光の振動数の逆数に等しい，すなわち $\delta t = 1/\nu$．時間間隔 $\delta t$（可視光に対して $\sim 10^{-14}$ s）の間は事実上 $R(t)$ は一定である．よって積分間隔では，$R(t)$ は定数で置き換えられる．結果(50.3)を光の振動数 $\nu$ を使って書くと

$$R(t_1)\,\nu_1 = R(t_0)\,\nu_0 \tag{50.4}$$

となる．この際，$\nu_1$ は発信された振動数であり，$\nu_0$ は受信された振動数である．次の形で書けば

$$R(t)\,\nu(t) = \text{const.} \tag{50.5}$$

は具体的な放射と吸収のあり方には依存しない．しかも任意の時間 $t$ にそれを観測できるのであるから，これはどんな電磁波に対しても成り立つ．したがって膨張宇宙では，漂っている光子は連続的な赤方偏移を受ける．特にこれは宇宙背景放射に対して成り立つ（54 節）．（遠ざかっていく星の重力場にいる星のように）弱まっていく重力場に向かって光子が向かっていき，その際エネルギーが失われると物理的には解釈することができる．さらに波長が $R(t)$ で測られるように，表式(50.5)を公式化することもできる．

光子に対して振動数 $\nu$ を運動量 $p = h\nu/c$ で置き換えると，(50.5)は

$$R(t)\,p(t) = \text{const.} \tag{50.6}$$

となる．この式は自由落下の重い粒子の運動量 $p(t) = \gamma\,m\,v$ に対しても成り立つことが示される（演習 50.1）．

星や銀河からの放射スペクトルでは一群のスペクトル線が見られ，われわれはそれを既知の原子遷移線に当てはめることができる．しかしその際，スペクトル線の構造が（地上で測られた線の構造に対して）ずれる．振動数の変動は赤方偏移パラメーターで記述される．

$$z = \frac{\lambda_{\text{receiver}}}{\lambda_{\text{source}}} - 1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 = \frac{\nu_1}{\nu_0} - 1 \tag{50.7}$$

時刻 $t_1$ にある銀河から放射されて今（$t_0$）受信された光に対して(50.5)と(50.7)とから

$$\boxed{z_{\text{cosm}} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1 \qquad \text{宇宙赤方偏移}} \tag{50.8}$$

が出る．膨張宇宙 $R(t_0) > R(t_1)$ では，赤方偏移が生じて $z_{\text{cosm}} > 0$ となる．この**宇宙**赤方偏移は $R(t)$ の変化によって引き起こされる．さらに振動数偏移は次のような理由からも起こりうる．

1. 源や受信者の場所の重力場に基づく重力赤方偏移．
2. 源や受信者の固有運動に基づくドップラーシフト．

(50.8)の評価のために $R(t)$ を $t_0$ の点でテイラー展開する．

$$R(t) = R(t_0)\left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}\, q_0\, H_0^2\, (t - t_0)^2 + \cdots\right] \tag{50.9}$$

この際，**ハッブル定数**

$$H_0 = \frac{c\,\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \tag{50.10}$$

と無次元の減速パラメーター

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}(t_0)\,R(t_0)}{\dot{R}(t_0)^2} \tag{50.11}$$

を導入した．$\dot{R} = d\,R/d\,(c\,t)$ のために $H_0^{-1}$ は時間の次元をもつ．$t = t_1$ にした(50.9)を(50.8)に代入する．

$$z_{\text{cosm}} \approx H_0\,(t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2\,(t_0 - t_1)^2 \tag{50.12}$$

これを光に適用する．その光は今現在（$t_0$）受信され，ある遠方の銀河からはるか前の時間（$t_1$）に放射されたものとする．この関係式で，光の伝搬時間 $t_0 - t_1$ をこの銀河までの距離で置き換えたい．(50.1)から

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{R(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{R(t_0)} \left[1 - H_0\,(t - t_0) \pm \cdots\right]$$

$$\approx \frac{c\,(t_0 - t_1)}{R(t_0)} + \frac{H_0\,c\,(t_0 - t_1)^2}{2\,R(t_0)} \tag{50.13}$$

を得る．これから発信者と受信者の今の距離 $D$ が出る．

$$D = D(t_0) = R(t_0)\,\chi \approx c\,(t_0 - t_1) + \frac{H_0\,c}{2}\,(t_0 - t_1)^2 \tag{50.14}$$

これを使って(50.12)の $t_0 - t_1$ を消去して

赤方偏移と距離の関係

$$z_{\text{cosm}} \approx \frac{H_0}{c}\,D + \frac{(1 + q_0)\,H_0^2}{2\,c^2}\,D^2 \tag{50.15}$$

を得る．この関係は，図 50.1 の**ハッブル・ダイアグラム**に表してある．その図は，（現在の）物理的な距離 $D$ を使って銀河の赤方偏移 $z_{\text{cosm}}$ を与える．$H_0\,D/c$ の巾展開としてこの関係は $H_0\,D/c < 1$ の制約のもとに成り立つ．

赤方偏移と距離の関係を評価するには，非常に遠い銀河の距離の計測を必要とする．この計測は次の節で議論され，その後 $H_0$ と $q_0$ に対する数値が与えられる．$H_0$ は正であり，よって宇宙は時間的に膨張していると読者はすでに気づいていることであろう．

## 宇宙の年齢

宇宙の今日の膨張を（ほとんどの宇宙モデルで，52-54 節）逆にたどると，結局 $R = 0$，すなわち特異点に着く．われわれの記述の枠組みでは，これは宇宙の初め（$t = 0$）であり，そして今の時間 $t_0$ は**宇宙の年齢**に等しい．宇宙年齢 $t_0$ の値はのちに(53.16)で与えられ議論される．

（質量分布の動力学の大域的な記述を）**宇宙モデル**と呼ぶように，$t_0$ を**宇宙年齢**と呼ぶことは，不遜ではあるが以前から行われている．内容的には，$t_0$

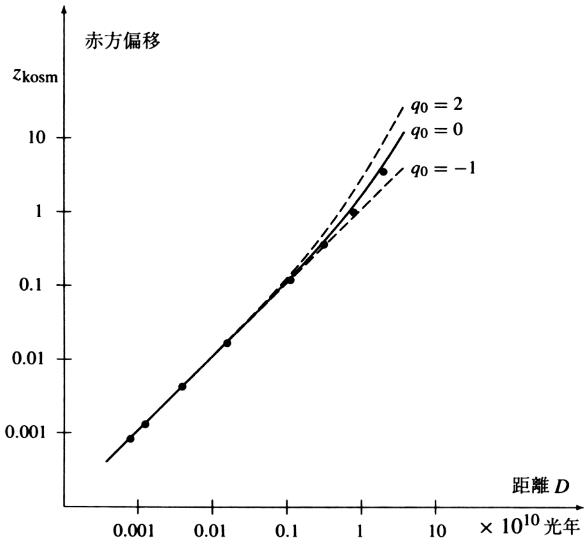



**図 50.1**: **ハッブル・ダイアグラム**は宇宙赤方偏移 $z_{\text{cosm}}$ を源までの距離 $D$ の関数として示す，(50.15)．ここでは両対数尺度が使われている．あまり大きくない距離に対しては，$z_{\text{cosm}} \approx H_0\, D/c$ が成り立つ．この直線の範囲からのずれは減速パラメター $q_0$ に依存している．関係式(50.15)がいろいろな $q_0$ の値に対して描かれている（実線と破線）．赤方偏移の計測（黒点，模式的）といろいろな銀河（あるいは他の天体，特にタイプ Ia の超新星）の距離の計測とから，$H_0$ と $q_0$ とを定めることができる．赤方偏移が発散する距離 $\mathcal{D}_0$ が(50.17)で与えられる．この距離に対して，後に $\mathcal{D}_0 \approx 4.4 \times 10^{10}$ 光年，(53.18)を得るであろう．$\mathcal{D}_0$ に近づくと展開(50.15)は成り立たなくなる．

は宇宙の質量の運動を最大限に遡れる時間間隔であるにすぎない．この外挿は特異点で終わるので，$t < 0$ の時間の宇宙の状態に関しては何も言うことはできない．したがって，時間間隔 $t_0$ はわれわれが（現時点で）宇宙を認識できる時間的な限界を何よりも特徴づける量である．

## 宇宙の地平線

$t_1 \to 0$ に対して $R(t_1) \to 0$ となることと，(50.8)とから

$$z \xrightarrow{t_1 \to 0} \infty \tag{50.16}$$

が出る．よって現在 $(t = t_0)$，われわれに届いている光は $t_1 = 0$ から $t_0$ の間に放射されたものである．すなわち，この光の源に対しては最遠の距離 $\mathcal{D}_0$ がある．そしてわれわれは，$\mathcal{D}_0$ より短い距離の天体を見ることができるのみである．すなわち，それを越えては何も見ることができない地平線がある．この**宇宙の地平線**[1)]の半径 $\mathcal{D}_0$ を計算する．

再び(50.1)と(50.2)で考えたものと同じ光の軌道を考える．$t_1 = 0$ から $t_0$ まで走る光は源と受信者間の（現在の）距離を与える．

$$\mathcal{D}_0 = R_0 \int_0^{t_0} d\chi = R_0 \int_0^{t_0} \frac{c\,dt}{R(t)} \qquad (50.17)$$

53 節でこの積分を見積もる．$D \to \mathcal{D}_0$ に対して $t_1 \to 0$ となる．よって，地平 $\mathcal{D}_0$ の近くからの光に対して赤方偏移は無限大になる．

$$D \to \mathcal{D}_0 \quad \text{に対して} \quad z \to \infty \qquad (50.18)$$

クエーサーに対して $z \sim 5$ までの値が観測される．地平からの光あるいは地平の向こう側の領域からの光は届くことはできない．よって，宇宙のこの部分については憶測することができるのみである．

“宇宙”という言葉について，われわれはたいてい半径 $\mathcal{D}_0$ の可視領域のみを想像する．宇宙の大きさが与えられるとすればその大きさが問題である．

稀に次のような地平の理由付けに出会う．“われわれの銀河に相対的に走っている銀河の速度は距離に比例する．したがって相対速度が $c$ に近づき，赤方偏移 $z$ が無限大になる距離がある.” この説明はドップラー効果を使っている．相対論的なドップラー効果（$v \to c$ に対して $\nu_0 \to 0$，よって $z \to \infty$ になる）の表式はしかし慣性系（あるいは局所慣性系）でのみ成り立ち，よって遠宇宙では成り立たない．このかぎりでは，この議論は成り立たない．これはしかし，オーダー 1 の係数までは正確な結果をもたらすので，それを初歩的な説明として認めることはできる．

---

1) リンドラー(Rindler) [文献 4] に従って，われわれは**粒子の地平**と**事象の地平**を区別して考える．**粒子の地平**はここで考えている地平であり，一方**事象の地平**は今後われわれに見えなくなるような領域との境界である（ブラックホールの $r = r_S$ の面など）．よってわかりやすいい呼び方である“事象の地平”との混同を避けて，ここでは $\mathcal{D}_0$ を地平あるいは宇宙の地平と呼ぶ．

## 光速を越える速度

開いている宇宙（$k = 0$ あるいは $-1$）では，二つの銀河間の宇宙後退速度には制限がない．

$$v_{\text{cosm}} = \frac{d}{dt}(R\chi) = \frac{dR}{dt}\chi \overset{t=t_0}{=} H_0 R_0 \chi \xrightarrow{\chi\to\infty} \infty \tag{50.19}$$

具体的に示すために，ある平面を考える．この面のうえでは（決まった座標をもつ点の間の）**すべての**距離は $R(t)$ に線形に増加する．この面では，計量は $ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 (dx^2 + dy^2)$ であり，これは $k = 0$ のロバートソン－ウォーカー計量に対応する．この計量を使って計算された二つの決まった座標点の相対速度は明らかに制限がない（$\dot{R} \neq 0$ に対して）．特にこの相対速度に対しては超光速，すなわち $v_{\text{cosm}} > c$ が可能である．

このような超光速をどう考えるか？　それは特殊相対論に矛盾しないのか？

ここで使用した計量の基礎を問題ごとに書き出し，（形式的かつ物理的に）なぜ特殊相対論と矛盾がないのか説明する．

1. **観測された**宇宙の膨張は，因果律で結びついている対象にあてはまる．すなわち，宇宙におけるわれわれのいる場所の周辺にあてはまる．一様性と等方性の仮定（宇宙原理）によって，この観測された膨張は**全**空間に当てはめられる．宇宙原理は，計量を定めるための明らかにもっとも単純化された仮説である．この仮説で，因果律で結びついていない領域に対する計量まで与えている．この領域に対しては，宇宙後退速度(50.19)は理論的な量で，ロバートソン－ウォーカー計量で計算された量である．

2. 特殊相対論は慣性系のみで成り立つ．ロバートソン－ウォーカー計量では，局所慣性系だけが存在する．すなわち，ロバートソン－ウォーカー計量は $ds \approx \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ によって局所的に近似されるだけである．この局所慣性系においてのみ特殊相対論の法則は成り立つ．（ただ $k = 0$ **および** $\dot{R} = 0$ に対してだけ大域的な慣性系が存在する．）局所慣性系は，たとえばわれわれの銀河の領域に対して存在できる．局所慣性系においてのみ光速は $c$ に等しい（しかも慣性系の運動に依存しな

い)．ここでだけ物質粒子の運動に対して $c$ が上限である．しかし，はるか遠くの銀河を記述できる慣性系はない．宇宙の地平の近くあるいはその向こうの銀河に対しては特にそうである．

3. 天の川の領域では局所慣性系が存在可能であり，遠く離れた銀河の領域で別の局所慣性系が存在可能である．これらの局所慣性系は（大域的）慣性系ではない（10 節）のであるから，それらは互いに超光速で運動することもできる．

まとめとしてもう一度確認しよう．ロバートソン－ウォーカー計量は，**有限の**領域における観測を**全**空間に当てはめるための試みである．全空間に当てはめることは，特定の計量に導くもっとも単純で可能な仮定である．しかし，この仮定は証明可能ではない．というのは，有限かつ可視可能な領域の観測は全体の一部を見ているにすぎないからである．

**演習**

50.1: 自由落下している質量粒子の運動量はロバートソン－ウォーカー計量では

$$p(t)\,R(t) = \text{const.}$$

に従って変化することを示せ．その際，計量 $d s^2 = c^2\,d t^2 - R\,(t)^2\,\chi^2$ を考えればそれで十分である．

# 51 宇宙における距離はしご

星や銀河への距離を測る方法である宇宙の距離はしごについて概観する．距離と赤方偏移の同時計測から，ハッブル定数 $H_0$ と減速パラメター $q_0$ が決められる．

どの遠距離計測でも，中心的要素は星または銀河の実視光度（$\ell$）と絶対光度（$L$）の比較である．ここで $\ell$ は地上で受け取るエネルギー束密度であり，$L$ は源が送り出すパワーである．パワー $L$ が等方に放出されているときは，ある半径 $D$ の面 $F$ に均等に分配され，したがって $\ell = L/F$ である．ユークリッド空間では $F = 4\pi D^2$ であり，よって $D = \sqrt{L/4\pi\ell}$ となる．われわれは**光度距離**

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi\ell}} \tag{51.1}$$

を定義する．ユークリッド空間では，$D_L$ は実際の距離 $D$,

$$D = D_L \qquad \text{ユークリッド空間で} \tag{51.2}$$

に等しい．ロバートソン－ウォーカー計量では，$D_L$ は $D$ からずれるが，このずれは以下で与えられる．

距離 $D$ を計測可能な光度 $\ell$ から得るためには，考えている天体の絶対光度 $L$ を知らなければならない．ところで，いくつかのタイプの星は特定の性質（たとえばそのスペクトル分布）によって識別され，その光度 $L$ が狭い範囲だけで変わる．このような星はわれわれの近くにも存在して，それらに対しては距離を直接に決めることができる．これらの星に対しては，このようにして $\ell$ と $D$ とを互い無関係に測ることができ，これらから $L$ を決めることができる．

近くにある星は三角法によって測ることができる (図 51.1)．このためには地球軌道の直径 $\Delta \sim 10^3$ 光秒を長さの基準として使う．この値自身は太陽系のレーダー・エコー計測などによって定められる．地球軌道上の向かい合った 2 点から，幾分異なった角度で星が見える．（図 51.1 のように）星が基準

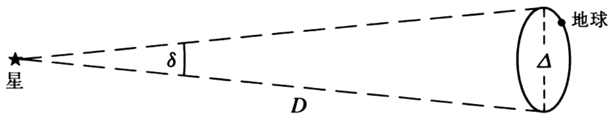



**図 51.1**: 地球軌道上（直径 $\Delta$）の対向する 2 点から，その角度の差が $\delta \approx \Delta/D$ である星が見える．あまり遠くない星に対してはこの角度の差は観測できる．恒星天の星は大多数の他の星に比べればずれが小さく，距離が遠いためもあって $\delta \approx 0$ が成り立つ．

線に垂直である場合，測られた角度の差から距離

$$D = \frac{\Delta}{\delta} \tag{51.3}$$

が出る．しかし角度 $\delta$ は，ほぼ 30 pc の距離の範囲にある星に対してだけ観測可能であり[2]，その星の数は 2, 3 千個である．その際，$\delta$ はさらに遠方にある星（$\delta \approx 0$）を基準として測られる．さて，だいたい冬と夏とに特定の天空領域が撮影される．すると両方の写真でいくつかの星が（多くの他の星と比べて）ずれて光っている．これらが近くにある星である．写真上の星の移動から $\delta$ が出るし，よって $D$ が出る．距離 $D$ と測られた光度 $\ell$ から考えている星の絶対光度 $L$ が与えられる．

この方法で特定の星のタイプの絶対光度 $L$ のリストを作成する．すると，よく知られた $L$ をもつ遠距離の天体では $\ell$ の計測だけで距離が与えられる．こうしてよく知られた $L$ をもつ星のタイプの参照リストを他の天体に次々と拡張して使うことができる．この進め方は三角測量に始まり，赤方偏移と距離の関係による距離決定で終わる．それぞれの方法は互いを拠り所にしているので，この方法は**宇宙の距離はしご**とも呼ばれる．はしごのそれぞれの段での不確定要素は，高階の段でのエラーを増幅させる可能性がある．ここで，このはしごを登るのに役立ついくつかの星のタイプを概観する．

1. ヘルツシュプルング(Hertzsprung)－ラッセル(Russel)図は，絶対光度を最大周波数に関して描いたものである．最大周波数は表面温度 $T$ によって定められる（プランク放射分布）．いわゆる**主系列星**に対しては，$T$ とともに $L$ が増加する．まず，距離 $D$ が三角測量で測られるよ

[2] 天文学的な距離は光年(ly)あるいはパーセク(pc)で与えられる．1 pc ≈ 3.2 ly が成り立つ．

うな近くにある主系列星の関数依存性

$$L = L(T) \qquad (\text{主系列星})$$

を定める．

わかった関係 $L(T)$ を使って，はるかに離れた主系列星の距離を（実視光度と最大周波数の測定から）定める．このやり方はほぼ 100 kpc の距離まで機能する．こうしてわれわれ自身の銀河――ほぼ $10^{10}$ の星をもつ天の川――の内部の距離が計測される．この方法は，遠く離れた銀河に対しては適していない．というのは，それらに対して主系列星の光度 $\ell$ があまりにも小さいからである．

2. 光度が周期的に変動する星がある．このいわゆる $\delta-$ ケフェイド変光星(Cepheid)の絶対光度 $L$ は変動の周期 $\tau$ の関数である．

$$L = L(\tau) \qquad (\delta-\text{ケフェイド変光星})$$

わかっている距離の範囲（項目 1）でまずこの関数が定められる．そしてもっと遠いケフェイド変光星の実視光度 $\ell$ と周期 $\tau$ が計測される．$\tau$ から $L$ が，そして $L$ と $\ell$ とから距離 $D$ が出る．これによってほぼ 20 Mpc までの距離が定められる．このようにして（ほぼ 20 の銀河を含む）局所銀河群が計測可能である．

3. 基準光源（わかっている絶対光度をもつ天体）として特にタイプ Ia の超新星（47 節）が適している．これらは質量が限界質量 $M_\mathrm{C}$（41 節）に近い白色矮星である．これらの超新星はほぼ等しい（時間依存性のある）絶対光度をもっている．この基準光源によってほぼ $10^{10}$ pc の距離，すなわち宇宙の地平線の近くの距離まで達することができる．

4. 一つの銀河でもっとも明るいいくつかの星は，ほぼ同じ絶対光度 $L = L_\mathrm{max}$ をもっていると想定してよい．同じ想定は銀河群のなかのもっとも明るいいくつかの銀河に対してしてよい[3]．この少し特殊な方法は他の方法を補うことができる．

---

[3] 訳注：同じタイプの銀河は同じ進化をしたと見なせるから．

1990 年代に（ハッブル(Hubble)宇宙望遠鏡[4])のような）大きな望遠鏡のおかげで，距離の決定に本質的な進歩がもたらされた．まず方法 2 を使って局地的な距離の尺度($\leq 20$ Mpc)が定量的に確定された．それから，この領域で超新星の絶対光度が正確に定められた．その後，方法 3 に基づいて遠距離計測が実施された．その際，$z = 2$ の近くまでの赤方偏移をもつ超新星が観測された．この進展によって，$H_0$ と $q_0$ の値がこれまでの値にくらべてより明確になった（この節の次の小節）．

このようにして得られた距離 $D$ およびそれと関連して測られた赤方偏移 $z$ から，$z$ と $D$ の系統的な関係(50.15)が実際に成り立つということが確認された．この後は(50.15)自身を遠距離計測に用いることができる．このようにして天体（たとえばクエーサー）の赤方偏移を測って，(50.15)からその距離を得る．ここで宇宙の距離はしごの概説を終わることにしよう．

銀河の距離を決定する際には，その空間分布に触れざるをえない．その際に可視物質の分布に不均一さがあるのに気がつく．銀河は糸状の模様を作っているように見える．このような不均一さは，宇宙原理で仮定された対称性から実際にはずれていることを示している．それは初期の宇宙におけるごくわずかな揺動から進化し，重力の影響で増大してきている．しかし，初期宇宙の比較的強い一様性は，今日まだ宇宙背景放射（54 節）に見られる．

## ロバートソン−ウォーカー計量における遠距離測定

ここまでの考察はユークリッド空間すなわち(51.2)に基づいている．ここで非ユークリッド空間からもたらされる修正を検討する．

まず再び三角測量を考える．ロバートソン−ウォーカー計量の線素(49.11)から始め，地球 − 星の距離を $\chi$ 方向（$D = R\chi$）に取り，小さな解放角 $\delta$ を $d\theta$ に取る．すると(49.11)から基準の長さ $\Delta$ に対して

$$\Delta = f(\chi)\, R\,\delta \tag{51.4}$$

が出る．ここで $R = D/\chi$ を代入すると

[4]) http://hst.stsci.edu/

$$D = \frac{\Delta}{\delta}\,\frac{\chi}{f(\chi)} \tag{51.5}$$

因子 $\chi/f(\chi)$ は空間曲率の効果を与える．53 節の宇宙の状態の議論から，考えられる曲率半径 $R$ は可視宇宙の大きさ（数 $10^{10}$ 光年）である．三角測量は $D \leq 10^2$ 光年の距離に制限されるので，ユークリッド空間に対する補正は無視できるほど小さい．

$$f(\chi)/\chi = 1 + \mathcal{O}(D/R) = 1 + \mathcal{O}(10^{-8}) \tag{51.6}$$

三角測量につづく宇宙距離はしごのすべての段は $\ell$ と $L$ との比較に基づいており，それはこのように $D_L$ をもたらす．そしてこれから $D$ が定められる．われわれは $D_L$ と $D$ との間の関係を導くことにする．

ある天体から発信された光子は距離 $D = R\,\chi$ を渡って面

$$F = 4\,\pi\,f(\chi)^2\,R(t_0)^2 \tag{51.7}$$

に広がる．今（$t_0$），この面で受信される光子を考える．$g_{00} = 1$ のために間隔 $\Delta t$ に源から送信された光子はまた間隔 $\Delta t$ の間に受信者に到着する．しかし(50.1)によって，$\Delta t$ の間の光子の伝搬方向への距離 $\Delta\chi$ は $t_1$ と $t_0$ とでは異なる．

$$\Delta\,\chi_1 = \frac{c\,\Delta t}{R(t_1)} \quad \text{そして} \quad \Delta\,\chi_0 = \frac{c\,\Delta t}{R(t_0)} \tag{51.8}$$

膨張($R(t_0) > R(t_1)$)によって光子は間引かれ，到着するエネルギー流束密度 $\ell$ には減少因子 $R(t_1)/R(t_0)$ が掛かる．引きつづき同じ大きさの因子が $R(t)\,\nu(t) = \text{const.}$，(50.5)のために光子の振動数変化に生じる．それゆえに，これらを合わせて次の実視光度

$$\ell = \frac{L}{4\,\pi\,f(\chi)^2\,R(t_0)^2}\,\frac{R(t_1)^2}{R(t_0)^2} \tag{51.9}$$

を得る．これと(51.1)とから

$$D_L = \frac{f(\chi)\,R(t_0)^2}{R(t_1)} = D\,(1+z)\,\frac{f(\chi)}{\chi} \quad \text{(ロバートソン－ウォーカー計量)} \tag{51.10}$$

を得る．上で $R(t_0)/R(t_1)=1+z$ と $D=R(t_0)\chi$ とを用いた．こうしてロバートソン − ウォーカー計量で成り立つ $D$ と $D_L$ との間の関係式ができた．$D\approx D_L$ に対する補正は，計測可能な赤方偏移 $z$ と空間の曲がりによって定められる因子 $f(\chi)/\chi$ に依存する．少なくとも補正係数 $1+z$ は，遠距離の際には考慮されなければならない．

## ハッブル定数と減速パラメターの決定

われわれは赤方偏移と距離の関係式(50.15)から，ハッブル定数 $H_0$ と減速パラメター $q_0$ を決定することを考える．

多数の天体に対して赤方偏移 $z$ と距離 $D$ とが定められるものとしよう．図 50.1 におけるように $\ln z$ に対して $\ln D$ が表される．その際，直線近似 $z_{\mathrm{cosm}}\approx H_0\,D/c$ が幾桁の範囲にもわたってよく成り立つ．非常に遠い天体では $z$ の大きなずれが生じる．この観測結果から次のことを得る．

1. 宇宙の一様，等方膨張の仮説の証明，すなわち $\dot{R}>0$ をともなう宇宙原理の証明．
2. ハッブル定数 $H_0$ の決定と減速パラメター $q_0$ の決定．

ハッブル自身は，1929 年に $H_0\approx 500$ km/s/Mpc という値を得ている．1990 年のほぼ半ばまで 10 年にわたって，正確な値をめぐっていろいろな研究グループの間で絶え間のない論争があった．お互い相容れない誤差の限界をめぐって 50 と 100 の数値が議論になった．この論争は距離の決定のむずかしさをまたもや映し出している．現在の値[5)]

$$H_0=(72\pm 8)\,\frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}} \tag{51.11}$$

については十分な意見の一致が存在している．これには上で簡単に述べた距離決定法の成果，特にハッブル望遠鏡[5)]の成果を取り入れたことが大いに役立っている．$H_0$ の値から，たとえば距離 $10^7$ 光年にある銀河はほぼ 200 km/s の速度をもってわれわれから離れていくし，10 倍さらに離れている銀河は 2000 km/s で離れていくと説明される．

[5)] C. H. Linewaver, *Cosmological Parameters*, ⟨www.arziv.org⟩ arXiv:astro-ph/0112381.

減速パラメターは

$$q_0 = -0.5 \pm 0.16 \tag{51.12}$$

と定められた[5)]. $q_0$ が負であることは，宇宙の膨張は**加速**していることを意味する.

ハッブル係数の逆数

$$\frac{1}{H_0} \approx 13.6 \times 10^9 \,\mathrm{yr.} \tag{51.13}$$

は次節以降で見るように，宇宙の年齢の尺度を決める.

終わりに，赤方偏移と距離の関係を評価するに際に考慮しなければならない点を検討する．発信源と受信者の**固有運動**は赤方偏移をもたらし，それらは宇宙赤方偏移と重なり合う．われわれ自身の立地点の固有運動は宇宙背景放射（54 節）におけるドップラー効果によって定められる．重要な成果は以下のとおりである.

1. われわれの観測点の固有運動（ほぼ 400 km/s）は，太陽をめぐる地球の運動(30 km/s)と天の川の内部のわれわれの太陽の運動(230 km/s)，天の川（ほぼ 500〜600 km/s）の運動から生じる.
2. 天の川は乙女座銀河団の一員である．天の川は（局所銀河群といっしょに）銀河団の中心に対してほぼ 200 km/s で運動している．乙女座銀河団自身，ヒドラ－ケンタウルス座銀河団の方向にほぼ 400 km/s で動いている．この運動を解明するためには，長い時間にわたって重力を働かせる大きな質量を必要とする．このために 1980 年代の半ばには，ヒドラ－ケンタウルス座銀河団の背後に目に見えない巨大銀河団が存在しているのではないかという仮説が出された．この巨大銀河団は巨大引力源（グレート・アトラクター）と呼ばれている．それはほぼ $5 \times 10^{16}\, M_\odot$ の質量をもち，地球からの距離が 50 Mpc でなければならない.

地球の固有運動は，全体としてほぼ距離 $3 \times 10^7$ 光年の場所の宇宙速度に等しい速度をもっている．よって赤方偏移と距離の関係式の評価に際しては，非常に遠い距離（ほぼ $D > 3 \times 10^9$ 光年）に対しては地球の固有運動は無視してよい.

# 52 宇宙モデル

われわれは宇宙全体にアインシュタインの場の方程式を適用する．簡単化した仮定のもとで，物質の分布の時間的発展と宇宙の重力場の時間的発展が記述できる宇宙モデルが得られる．

質量分布に対して宇宙原理を当てはめることから始める．空間の動力学はロバートソン－ウォーカー計量で記述される．ロバートソン－ウォーカー計量の計量テンソルは

$$\left(g_{\mu\nu}\right) = \mathrm{diag}\,\left(1\,,\ -\frac{R\,(t)^2}{1-k\,r^2}\,,\ -R\,(t)^2\,r^2\,,\ -R\,(t)^2\,r^2\,\sin^2\theta\right) \tag{52.1}$$

である．この計量テンソルは宇宙定数をもつアインシュタインの場の方程式(21.36)

$$R_{\mu\nu} - \Lambda\,g_{\mu\nu} = -\frac{8\,\pi\,G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\,g_{\mu\nu}\right) \tag{52.2}$$

に対する試行的な解である．宇宙定数 $\Lambda$ は宇宙全体の動力学に対して重要であるので考慮に入れてある．

われわれは宇宙の物質を，全体として，そして平均として，エネルギー運動量テンソル(20.29)をもつ連続な完全流体

$$T_{\mu\nu} = \left(\varrho + P/c^2\right)u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}P \tag{52.3}$$

と考える．宇宙原理によって質量密度 $\varrho$ と圧力 $P$ は空間的に一様であり，よって

$$\varrho\,(r,\,t) = \varrho\,(t)\,, \qquad P\,(r,\,t) = P\,(t) \tag{52.4}$$

である．銀河内では，空間的に平均された後，密度 $\varrho\,(t)$ が定まり，銀河自身は $x^i = \mathrm{const.}$，(49.2)，の形の軌道をもつ．$u^i = d\,x^i/d\,\tau = 0$ と $g_{00} = 1$，$g_{\mu\nu}\,u^\mu\,u^\nu = g^{\mu\nu}\,u_\mu\,u_\nu = c^2$ から

$$\left(u^\mu\right) = \left(u_\mu\right) = (c,\,0,\,0,\,0) \tag{52.5}$$

が出る．よってエネルギー運動量テンソルは

$$(T_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\left(\varrho\, c^2,\ \frac{P\,R^2}{1-k\,r^2},\ P\,R^2\,r^2,\ P\,R^2\,r^2\,\sin^2\theta\right) \tag{52.6}$$

となる．これは対角和

$$T = T^{\lambda}{}_{\lambda} = g^{\mu\nu}\,T_{\mu\nu} = \varrho\,c^2 - 3\,P \tag{52.7}$$

をもつ．リッチ・テンソルに対する式(46.8)-(46.11)に $V = R^2\,r^2$ と $U = R^2/(1-k\,r^2)$ とを代入する．これは

$$R_{00} = \frac{3\,\ddot{R}}{R} \tag{52.8}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{1-k\,r^2}\left(R\,\ddot{R} + 2\,\dot{R}^2 + 2\,k\right) \tag{52.9}$$

$$R_{22} = -r^2\left(R\,\ddot{R} + 2\,\dot{R}^2 + 2\,k\right) \tag{52.10}$$

と $R_{33} = R_{22}\,\sin^2\theta$ とを与える．他のすべての $R_{\mu\nu}$ はゼロとなる．場の方程式の 00-成分は

$$3\,\ddot{R} - \Lambda\,R = -\frac{4\,\pi\,G}{c^4}\left(\varrho\,c^2 + 3\,P\right)\,R \tag{52.11}$$

となる．空間成分はすべて同じ方程式を与える．

$$R\,\ddot{R} + 2\,\dot{R}^2 + 2\,k - \Lambda\,R^2 = \frac{4\,\pi\,G}{c^4}\left(\varrho\,c^2 - P\right)\,R^2 \tag{52.12}$$

よって，場の方程式から三つの成分 $R\,(t)$ と $\varrho\,(t)$，$P\,(t)$ に対する二つの微分方程式を得る．解を得るために 3 番目の表式として状態方程式 $P = P\,(\varrho)$ を必要とする．そのために二つの極限を考える．

$$P = 0 \qquad \text{(非相互作用性物質)} \tag{52.13}$$

$$P = \frac{\varrho\,c^2}{3} \qquad \text{(放射優勢)} \tag{52.14}$$

最初の式では，粒子は非相対論的でありかつ $P \ll \varrho\,c^2$ であることが前提となっている．すなわちこの場合，われわれは宇宙を非相対論的な速度をもつ

非相互作用性（インコヒーレント）粒子の集合であると思い描いている．よって質量密度は，粒子の静止質量によるものが支配的である．これは（粒子としての銀河をもち，かつ典型的な銀河に対して $dx^i/dt = 0$ であるような）現在の宇宙に対する便利な近似である．2 番目の状態方程式は電磁放射に対して正確に成り立ち，また相対論的粒子に対して近似的に成り立つ[6]．この近似はごく初期の宇宙（54 節）に適している．

(52.11) と (52.12) から $\ddot{R}$ を消去すると次を得る．

$$\dot{R}^2 + k - \frac{1}{3}\Lambda R^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varrho R^2 \tag{52.15}$$

そしてこれを微分する．

$$2\dot{R}\ddot{R} - \frac{2}{3}\Lambda R\dot{R} = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(2R\dot{R}\varrho + R^2\dot{\varrho}\right) \tag{52.16}$$

これから $2\dot{R}/3$ を掛けた方程式 (52.11) を引き去ると

$$\dot{\varrho} = -\frac{3\dot{R}}{R}\left(\varrho + \frac{P}{c^2}\right) \tag{52.17}$$

を得る．これから (52.13) に対する質量保存則

$$\varrho_{\rm mat}(t)\,R(t)^3 = \text{const.} \qquad (P = 0,\ \ \varrho = \varrho_{\rm mat}) \tag{52.18}$$

を得る．物質優勢密度を $\varrho_{\rm mat}$ で表し，それに対して放射優勢密度を $\varrho_{\rm rad}$ で表す．(52.14) に対しては，(52.17) から

$$\varrho_{\rm rad}(t)\,R(t)^4 = \text{const.} \qquad (P = \varrho c^2/3,\ \ \varrho = \varrho_{\rm rad}) \tag{52.19}$$

を得る．両方の場合をいっしょに議論する場合は $\varrho = \varrho_{\rm mat} + \varrho_{\rm rad}$ と置き，(52.18) と (52.19) とは別々に成り立つと想定する．このことは，放射と物質が相互作用を行わないとき，または二つの項のどちらかが密度 $\varrho$ を支配していてもう一つが無視できるときに許される．われわれは次の省略形

$$K_{\rm m} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varrho_{\rm mat} R^3 = \text{const.}, \qquad K_{\rm r} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varrho_{\rm rad} R^4 = \text{const.} \tag{52.20}$$

---
[6] 訳注：8 節参照．

を用い，(52.15)の右辺に $\varrho = \varrho_{\rm mat} + \varrho_{\rm rad}$ を代入する．するとスケール因子 $R\,(t)$ に対する運動方程式は

$$\boxed{\dot{R}^2 - \frac{K_{\rm r}}{R^2} - \frac{K_{\rm m}}{R} - \frac{1}{3}\,\Lambda\,R^2 = -k \qquad \text{フリードマン (Friedmann) モデル}} \tag{52.21}$$

となる．この方程式は有効ポテンシャル

$$V\,(R) = -\frac{K_{\rm r}}{R^2} - \frac{K_{\rm m}}{R} - \frac{1}{3}\,\Lambda\,R^2 \tag{52.22}$$

を使って $\dot{R}^2 + V\,(R) = -k$ の形に書ける．このポテンシャルは図 52.1 に描かれている．$V\,(R)$ と $\dot{R} = d\,R/d\,(c\,t)$，$k$ は無次元である．$R\,(t)$ に対する方程式(52.21)はこの節の中心的な結果である．これは宇宙の全体的な運動を定める．

宇宙定数がなくかつ物質優勢の宇宙（$K_{\rm r} = 0$）に対しては，(52.21)を

$$\frac{M}{2}\left(\frac{d\,R}{d\,t}\right)^2 - \frac{G\,M^2}{R} = \text{const.} \tag{52.23}$$

の形で書くことができる．ここで(52.18)によって，$M = (4\,\pi/3)\,\varrho_{\rm mat}\,R^3$ である．この方程式はエネルギー則と解釈できる．すなわち“運動エネルギー＋ポテンシャルエネルギー＝const.”．全エネルギー(右辺の const. $\equiv -k\,M\,c^2/2$)の符号は $k$ から定められる．(運動方程式 $m\,\dot{r}^2/2 + V_{\rm eff}(r) = $ const. をもつ) 2 体問題に類似して，$k = 1$ は束縛運動（楕円）に，$k = -1$ は非束縛運動（双曲線）に対応する．そして $k = 0$ は，その二つの間にある境界の運動（放物線）である．宇宙に当てはめると，(以下でさらにくわしく見るように) これは次のことを意味する．$k = -1$ に対しては運動エネルギーが支配的であり，今の宇宙の膨張がそのまま進行する．$k = 1$ に対しては，それに反して $E_{\rm kin} + E_{\rm pot} < 0$ である．それで系は束縛されていて，今の膨張はいつかは終わり収縮に移行する．境界値の $k = 0$ に対しては，膨張速度は漸近的にゼロになる．

(52.23)の形では，宇宙の質量の大規模な運動はニュートン理論の枠組みでも記述でき，かつ理解できる．しかし，ニュートン理論はユークリッド空間

$(k=0)$ を前提としており，さらに非相対論の場合のみを記述することができる．

さて，一般的な形(52.21)，(52.22)の議論に戻ることにする．宇宙スケール因子 $R(t)$ は，質量分布の動力学と重力場（すなわち計量）を規定する．したがって，(52.21)によって全体として宇宙に対するモデルが与えられる．それは**宇宙モデル**あるいは**フリードマン・モデル**と呼ばれる．いろいろな具体的なモデルが，定数 $k$ や $\Lambda$，$K_{\rm m}$，$K_{\rm s}$ の選び方で定義される．実際の解 $R(t)$ は，そのほかにまた初期値 $R(0)$ と $\dot{R}(0)$ とに依存する．その解を調べるために図 52.1 の有効ポテンシャル $V(R)$ を簡単に見てみる．これに対しては $K_{\rm r}=0$ が仮定してある．というのは，$K_{\rm s}/R^2$ と $K_{\rm m}/R$ とは図 52.1 の尺度ではよく似た振舞いをするからである．よって定性的な振舞いは，ただ $\Lambda$ の符号だけに依存する．

$V(R)$ のグラフ（図 52.1）の表示から，解 $R(t)$ の振る舞いを読み取ることができる．$\dot{R}^2$ は $-k$ で表される水平線への距離である．$\dot{R}^2>0$ のために，$\Lambda<0$ に対する運動は有限の領域に収束する．$\Lambda=0$ の場合，$k=1$ に対しては同様に束縛解を得るし，$k=-1$ に対しては非束縛解を得る．$\Lambda>0$ の場合は $k=0,-1$ に対して非束縛運動になり，$k=1$ に対してはその地平線が曲線 $V(R)$ を 1 度切るか，2 度切るか，それとも切らないかで区別される．それぞれの場合は以下で個別に議論する．

まず $R\to 0$ に対する解の振舞いを考える．ここでは，$-1/R$ に比例する項と $-1/R^2$ に比例する項とが支配的である．よってその振る舞いは $k$ と $\Lambda$ には依存せず，次のことが成り立つ．

$$\dot{R}^2 \approx \frac{K_{\rm r}}{R^2} \quad \longrightarrow \quad R(t)\propto t^{1/2} \tag{52.24}$$

$$\dot{R}^2 \approx \frac{K_{\rm m}}{R} \quad \longrightarrow \quad R(t)\propto t^{2/3} \tag{52.25}$$

どの場合も $R\to 0$ に対する速度 $\dot{R}$ は無限大に近づく．$R(t)$ のグラフはそこで垂直な接線である．現実的なモデルでは $K_{\rm r}\neq 0$ であるので，$R\to 0$ に対してはいつも(52.24)となる．しかし，（$K/R^2>K_{\rm m}/R$ で記述される）放射優勢はほんの短い時間（ほぼ $t=0$ から $t=10^{-6}\,t_0$ までである；$t_0$ は宇宙

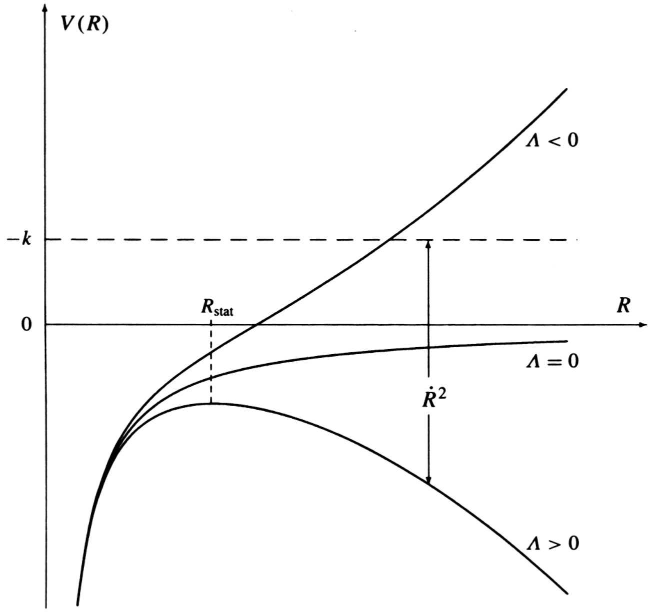



**図 52.1**: 宇宙運動方程式 $\dot{R}^2 + V(R) = -k$ に対する有効ポテンシャル $V(R)$. $-k$（図では $k < 0$ が仮定してある）である水平線と $V(R)$ との間の距離は $\dot{R}^2$ を与える．宇宙スケール因子 $R(t)$ に対する可能な解は，宇宙定数 $\Lambda$ の符号に依存している．$\Lambda > 0$ に対しては，静的な（しかし不安定な）解 $R(t) = R_{\rm stat} = \text{const.}$ がポテンシャル最大の場所で可能である．

年齢）だけである．図 52.1 を手がかりに，解のタイプをいろいろと区別することができる．

1. $\Lambda < 0$ のときは，すべての $k$ 値に対して上限 $R_{\max}$ がある．これによって，$R = 0$ と $R = R_{\max}$ との間に図 52.2 に示されているような周期的な運動が生じる．$R \to R_{\max}$ に対しては $\dot{R} \to 0$ が成り立つ．
2. $\Lambda = 0$ のときの解が図 52.3 に示してある．$k = 1$ に対して項目 1 によく似た束縛運動を得る．$k = 0$ に対して膨張の速度は（$\dot{R}^2 \propto 1/R$ のために）ゆっくりとゼロに近づき，$k = -1$ に対しては一定値に近づく．$\Lambda = 0$ と $k = 0$ とをもつ宇宙モデルは，**アインシュタインード ジッター宇宙**と呼ばれる．

3.　$\Lambda > 0$ に対してはいろいろな場合に別れる．

(a)　$\Lambda = \Lambda_{\rm cr}$ と $k = 1$：$\Lambda_{\rm cr}$ は，図 52.1 の $k = 1$ に対する水平線が，まさにポテンシャルの最大値になるように定められる．$K_{\rm r} \approx 0$（現在の宇宙に対する近似）と $dV/dR = 0$，$V = -k = -1$ から

$$\Lambda = \Lambda_{\rm cr} = \frac{4}{9\,K_{\rm m}^2} \quad \text{そして} \quad R = R_{\rm stat} = \frac{3\,K_{\rm m}}{2} \tag{52.26}$$

が出る．これは**静的**アインシュタイン解（図 52.4）である．アインシュタインは，このような静的な解，$R(t) = R_{\rm stat} = \text{const.}$ を得るために宇宙定数を導入した．しかしながら図 52.1 でわかるように，この解は不安定である．収縮あるいは膨張が始まるためにはわずかなずれで十分である．

(b)　$\Lambda < \Lambda_{\rm cr}$ と $k = 1$：k=1 に対する水平線は，曲線 $V(R)$ を 2 点，$R_1$ と $R_2$ とで切る．よって 0 と $R_1$ との間の周期解か，または $R > R_2$ の領域の非束縛解かを得る．図 52.5 を見よ．

(c)　$\Lambda = \Lambda_{\rm cr}(1+\epsilon)$ と $k = 1$：$\epsilon \ll 1$ のときは，$k = 1$ に対して $V(R)$ の最大値のわずか上に水平線がある．それゆえ速度 $\dot{R}$ は，それに対応してそこでは小さく，膨張の早さは遅くなる（図 52.6 の下の曲線）．この宇宙モデルはルメートル(Lemaître)宇宙と呼ばれる．

(d)　$\Lambda > \Lambda_{\rm cr}$ と $k = 1$：$-k$ に対する水平線は曲線 $V(R)$ を切らない．$V(R)$ の最大値の領域で速度および膨張は減速される．図 52.6 の上の線は，このような解の振る舞いを示している．

(e)　$\Lambda > 0$ と $k = 0, -1$：3d の場合によく似ており，最大値の領域でわずかな減速がある．図 53.1 に，$\Lambda > 0$ と $k = 0$ とに対する解 $R(t)$ が示してある．

(21.32) によって，宇宙定数はエネルギー密度 $\varrho_\Lambda c^2 = (c^4/8\pi G)\,\Lambda$ に対応している．よって $\Lambda$ は正であることが期待される．この場合，$\Lambda$ を含む項は反重力的に働く．すなわち，$-K_{\rm m}/R$ と $-\Lambda R^2/3$ はポテンシャル (52.22) において同じ符号を取るが，関係した力 $-dV/dR$ は違った符号を取る．通常の質量密度は収縮の方向に働くが，$\Lambda$ 項は逆に膨張の方向に働くのである．

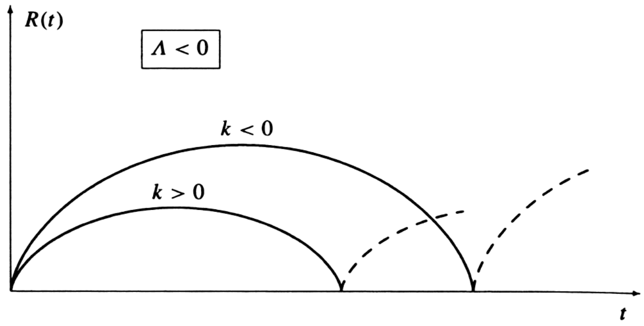



**図 52.2**: $\Lambda < 0$ に対する宇宙スケール因子 $R(t)$ の時間依存性．膨張は最終的にはつねに収縮に移行する．

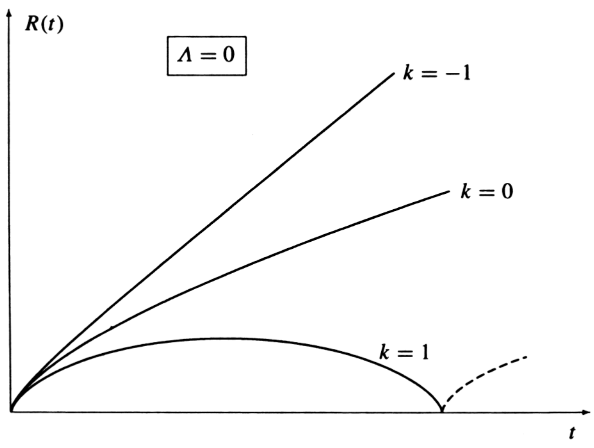



**図 52.3**: $\Lambda = 0$ に対する宇宙スケール因子 $R(t)$ の時間依存性．$k = 1$ と $k = 0$, $k = -1$ の場合は 2 体問題に類似して楕円軌道と放物軌道，双曲軌道に対応する．$\Lambda = 0$ と $k = 0$ をもつ宇宙モデルは，アインシュタイン － ドジッター宇宙と呼ばれる．

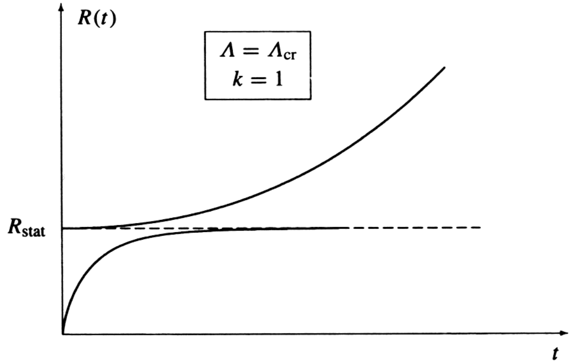



**図 52.4**: $\Lambda = \Lambda_{\rm cr}$ と $k = 1$ に対する宇宙スケール因子 $R(t)$ の時間依存性．静的アインシュタイン宇宙（破線）は不安定で，わずかなずれが膨張か収縮を引き起こす．非束縛運動は，終いには指数関数的，$R \propto \exp(\,(\Lambda/3)^{1/2}\,ct\,)$ に進行する．このことは $\Lambda > 0$ に対して一般に成り立つ．

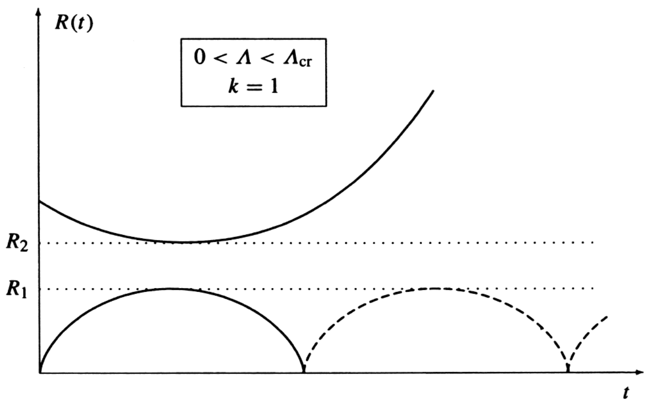



**図 52.5**: $0 < \Lambda < \Lambda_{\rm cr}$ と $k = 1$ に対する宇宙スケール因子 $R(t)$ の時間依存性．この $\Lambda$ 値に対しては，$k = 1$ の場合の水平線は図 52.1 の曲線 $V(R)$ を 2 度横切る．

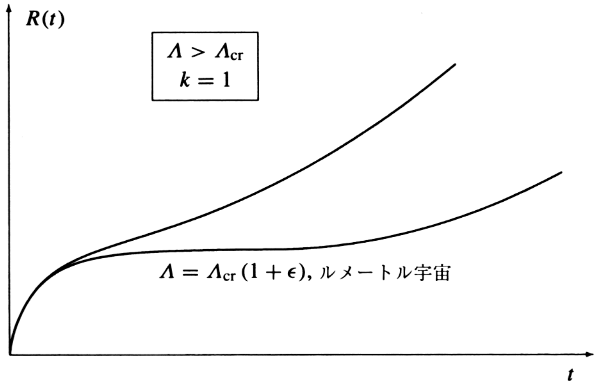



**図 52.6**: $\Lambda > \Lambda_{\rm cr}$ と $k=1$ に対する宇宙スケール因子 $R(t)$ の時間依存性．$\Lambda$ が $\Lambda_{\rm cr}$ に非常に近い場合，長時間の近似的な定常位相（ルメートル宇宙）が存在する．上方の曲線は $\Lambda > 0$ と $k = 0,\ -1$ とに対する定性的な振舞いを再び示す．

$\Lambda > 0$ と十分大きな $R$ に対しては，解は発散する．

$$R \to \infty: \qquad \dot{R}^2 \approx \frac{\Lambda R^2}{3}, \qquad R(t) \approx R(0)\,\exp\left(\sqrt{\Lambda/3}\,c\,t\right) \tag{52.27}$$

このことは，指数関数的に加速される膨張を意味する．このような加速される膨張はまた，$\Lambda$ が非常に大きくて $\Lambda$ 項が運動方程式(52.21)を支配するときにも得る．

次の節で，ここで議論されたモデルのどれが，$H_0$ と $q_0$，$\varrho(t_0)$ の観測的なデータに照らしてわれわれの宇宙に当てはめることができるかを調べる．

# 53 宇宙の状態

前節で紹介した宇宙モデルが現在の宇宙に適用できるかどうかを検討する．新しく得られた知識をもとにほぼ 1997 年以来専門家は，平坦で（またはわずかな曲率をもって）膨張している宇宙を支持するようになった．現在の動力学は宇宙項で支配されており，われわれはその意味を少しくわしく調べる[7)]．最後にオルバース(Olbers)のパラドックスを検討する．

宇宙の包括的な運動は(52.21)で記述される．今日の宇宙では放射密度の寄与は小さい．$K_{\mathrm{r}} \approx 0$ と置いて

$$\dot{R}^2 - \frac{K_{\mathrm{m}}}{R} - \frac{1}{3}\,\Lambda R^2 = -k \tag{53.1}$$

を得る．ここで $\dot{R} = dr/d(ct)$ である．今日の時点 $t = t_0$ に関して(53.1)を評価する．この際，次の表示

$$R_0 = R(t_0)\,, \qquad \frac{H_0}{c} = \frac{\dot{R}(t_0)}{R_0}\,, \qquad q_0 = -\frac{\ddot{R}(t_0)\,R_0}{\dot{R}(t_0)^2} \tag{53.2}$$

を宇宙スケール因子とハッブル定数，減速パラメターに対して使うことにする．加えて無次元の変数

$$x(\tau) = \frac{R(t)}{R_0} \quad \text{そして} \quad \tau = H_0\,t \tag{53.3}$$

を導入する．(53.1)に $c^2/H_0^2$ と $1/R_0^2$ とを掛けると，簡単な計算の後

$$\boxed{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \frac{\Omega_{\mathrm{m}}}{x} - \Omega_\Lambda\,x^2 = \Omega_{\mathrm{k}}} \tag{53.4}$$

を得る．この際，次の省略形

$$\Omega_{\mathrm{m}} = \frac{\varrho_{\mathrm{mat}}(t_0)}{\varrho_{\mathrm{cr}}(t_0)}\,, \qquad \Omega_\Lambda = \frac{1}{3}\frac{\Lambda c^2}{H_0{}^2}\,, \qquad \Omega_{\mathrm{k}} = -\frac{k\,c^2}{R_0{}^2\,H_0{}^2} \tag{53.5}$$

---

[7)] これに関しては D. Giulini and N. Straumann の論文，*Das Rätsel der kosmischen Vakuumenergiedichte und die beschleunigte Expansion des Universums*（宇宙の真空エネルギー密度と加速している膨張の謎），⟨www.arxiv.org⟩ arXiv:astro-ph/0009368 or Physikalische Blätter 56 (2222) 41 を挙げておく．

を導入した．ここで

$$\varrho_{\rm cr}(t_0) = \frac{3\,H_0^2}{8\,\pi\,G} \approx 0.93 \times 10^{-26}\ \frac{\rm kg}{\rm m^3} \tag{53.6}$$

は，いわゆる**臨界質量密度**である．なお数値を得る際，(51.11)を使った．

無次元の量 $\Omega_{\rm m}$ と $\Omega_\Lambda$，$\Omega_{\rm k}$ は，今日の宇宙の質量密度と宇宙定数，曲率を特徴づける．それらは簡単な関係

$$\boxed{\Omega_{\rm m} + \Omega_\Lambda + \Omega_{\rm k} = 1} \tag{53.7}$$

を満たすが，これは $t = t_0$（すなわち $x = 1$ と $d\,x/d\,\tau = 1$）と置いた(53.4)から出る．数値 $\Omega_{\rm m}$ と $\Omega_\Lambda$，$\Omega_{\rm k}$ は，現時点（$x = 1$）の運動方程式(53.4)で，関係している諸量（質量密度，宇宙定数，曲率）の影響がどれほど強いか，その目安である．

類似の簡単な関係式を減速パラメター $q_0$ に対して導く．そのために，(53.1)を時間に関して微分する．

$$2\,\dot R\,\ddot R + \frac{K_{\rm m}\,\dot R}{R^2} - \frac{2}{3}\,\Lambda\,R\,\dot R = 0 \tag{53.8}$$

これに $R/\dot R^3$ を掛け，再び $t = t_0$ と置く．すると(53.2)と(53.5)の記号を使って

$$\boxed{q_0 = \frac{\Omega_{\rm m}}{2} - \Omega_\Lambda} \tag{53.9}$$

を得る．ここでの記述の枠内では，現在の宇宙の状態は五つの量から決められる．

$$宇宙の状態：(\,\Omega_{\rm m},\ \Omega_\Lambda,\ \Omega_{\rm k},\ H_0,\ q_0\,) \tag{53.10}$$

51 節で，ハッブル・ダイアグラムの評価から

$$H_0 \approx (72 \pm 8)\,\frac{\rm km/s}{\rm Mpc}\,, \qquad q_0 = -0.5 \pm 0.15 \tag{53.11}$$

が得られることに触れた．他の量の実際の値[8]は

$$\Omega_{\rm m} = 0.3 \pm 0.1\,, \qquad \Omega_\Lambda = 0.7 \pm 0.1\,, \qquad \Omega_{\rm k} = 0 \pm 0.06 \tag{53.12}$$

[8] C. H. Linewaver, *Cosmological Parameters*, ⟨ www.arxiv.org ⟩ arXiv:astro-ph/0112381. この節で与えられている観測値が，関係している原著とともにこの文献に出ている．

である．(53.7)と(53.9)とのために，(53.10)の五つの量のうちの三つだけが互いに独立である．これらの値がどのようにして決められるのかを考えてみよう．ハッブル・ダイアグラム（図 50.1）の解析から，$H_0$ と $q_0$ が得られるということから始めることにする．3 番目の独立な量として $\Omega_\mathrm{m}$ を選び，次のようにして決める．すなわち，ある銀河団の外部の銀河の運動を知ればその銀河団の質量が推測できる（これに関しては(48.22)の前の議論を見よ）．それで体積当たりの銀河団の数を当たれば $\Omega_\mathrm{m} = 0.3 \pm 0.1$ になる[9]．

1990 年代の観測は高度の進歩をとげた．そのおかげで(53.11)と(53.12)の数値は信頼できるものと思われている．その観測実験は以下のとおりである．

1. 新しい大きな望遠鏡，特にハッブル宇宙望遠鏡[10]によるタイプ Ia の超新星の解析によって，$H_0$ と $q_0$ に関して(53.11)に与えられている値が得られた．
2. 気球観測 *Boomerang*[11]と *Maxima-I*[12]によって，高い精度で宇宙背景放射の非等方性が計測された．宇宙背景放射（54 節）は，放射と（電離）物質とが平衡であった初期宇宙にその起源をもつ．非等方性の発達は主として宇宙の空間曲率に依存する．データの解析からは平坦な宇宙，すなわち $\Omega_\mathrm{k} \approx 0$ が得られた．

まとめると，ハッブル・ダイアグラム(図 50.1) から与えられるパラメター $H_0$ と $q_0$ 以外に，もう一つ別のパラメターが必要である．われわれはこれに対して，次の検討をした．(i) 銀河団に対する運動から質量密度が決められると考えて，$\Omega_\mathrm{m} \approx 0.3$ を得た．(ii) 宇宙背景放射の非等方性から $\Omega_\mathrm{k} \approx 0$ を得た．両方の数値は，(53.7)と(53.9)を考慮すると同じ結果(53.12)をもたらす．

さらに議論を進めるために，以下のように値を定める．

現在の宇宙：

$$(\,\Omega_\mathrm{m},\ \Omega_\Lambda,\ \Omega_\mathrm{k},\ q_0\,) = (0.3,\ 0.7,\ 0,\ -0.5)\,,\quad H_0 = 72\,\frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}} \qquad (53.13)$$

---

[9] N. A. Bahcall et al., ⟨www.arxiv.org⟩ arXiv:astro-ph/9906463

[10] http://hst.stsci.edu/

[11] http://www.physics.ucsb.edu/boomerang/

[12] http://cosmology.berkeley.edu/groop/cmb/

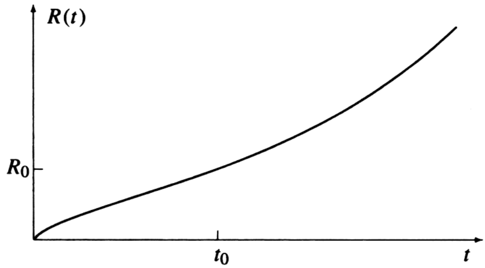



**図 53.1**: 時間の関数としての宇宙スケール因子 $R(t)$．示されている曲線は密度係数(53.13)をもつ(53.4)の解である．現在の時点に関しては $R(t_0) = R_0$ が成り立つ．初期のころ（$t \ll t_0$）は，(53.4)において項 $\Omega_{\mathrm{m}}/x$ が曲線を支配している（負の曲率）．現在は，(53.4)において項 $\Omega_\Lambda x^2$ が支配的である．このことは現在も将来も膨張が加速されることを意味する（曲線の正の曲率）．

ほぼ 1997 年までは $\Lambda = 0$ が好まれていた．当時はいわゆるアインシュタインードジッター宇宙

$$\text{アインシュタインードジッターの宇宙：}$$
$$(\Omega_{\mathrm{m}},\ \Omega_\Lambda,\ \Omega_{\mathrm{k}},\ q_0) = (1,\ 0,\ 0,\ 0.5) \qquad (53.14)$$

が，特に簡単なしかも可能性の高い宇宙モデルであった．この宇宙の時間的なスケール因子の振舞いは図 52.3 の真ん中の曲線で与えられる．$\Lambda = 0$ から $\Omega_{\mathrm{k}} = 1 - \Omega_{\mathrm{m}}$ が出る．それで曲率は，$\Omega_{\mathrm{m}} = \varrho_{\mathrm{mat}}(t_0)/\varrho_{\mathrm{cr}}(t_0) = 1$ に対しては，まさにゼロになる．これに反して質量密度が限界値(53.6)を越えるときは，曲率は正であり現在の膨張は終いには収縮に移るであろう（図 52.3 下方の曲線）．これに反してやや小さい質量密度に対しては，宇宙は開いていて（$k = -1$）どんどん膨張していくであろう．このことは質量密度(53.6)の**臨界**という命名を説明している．しかし，新しいデータによって臨界質量密度の概念は意味が失われてしまった．

## 時間的発展

スケール因子 $x(\tau)$ あるいは等価である $R(t)$ の時間的経過は，(53.4)の積分

$$\tau = H_0\, t = \int_0^x \frac{d\,x'}{\sqrt{\Omega_{\rm m}/x' + \Omega_\Lambda\, x'^2 + \Omega_{\rm k}}} \tag{53.15}$$

から出る．われわれの宇宙(53.13)に対する曲線 $R\,(t)$ はこれから得られて，それは図 53.1 に示されている．現在，運動は宇宙定数を含む項 $\Omega_\Lambda\, x^2$ によって支配されている．というのは，$x = 1$ に対して(53.4)のこの項は，物質項 $\Omega_{\rm m}/x$ よりもほぼ2倍大きい．このことは，現在の時点で図 53.1 における曲線のわずかな正の曲率によってはっきり現れている．

現在の膨張を逆にたどっていくと，宇宙スケール因子がゼロの世界に行き着く．この値に接近すると多くの物理量が特異になる．よって考えているモデルでは，もはや何も言うことはできない．$R\,(t) = 0$ となる時点は任意にゼロと置かれ（これは(53.15)で使われた），“宇宙の始まり”と考えられる．この表現に対するコメントは50節“赤方偏移と距離の関係”の小節“宇宙の年齢”で与えられている．宇宙の始まりから今日までの物理的な発展は，これからの節で詳細に議論されるであろう．

現時点 $t = t_0$ に対しては $x = 1$ である．よってわれわれのモデルでは，宇宙の年齢は

$$\boxed{T_{\rm cosm} = t_0 = \int_0^1 \frac{dx}{dx/dt} = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\rm m}/x + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_{\rm k}}} \approx 13 \times 10^9 {\rm yr}} \tag{53.16}$$

から出る．パラメターの値(53.13)を使うと，(53.16)の積分の値は 0.964 である．よって

$$T_{\rm cosm} \approx \frac{1}{H_0} \tag{53.17}$$

はよい近似である（そしてそれだけではなく，他の宇宙モデルのように荒い近似ではない）．

似たような宇宙の年齢は，これまで独立に天の川の年齢見積もりや，もっとも古い星の寿命の推定値から得られている．このような見積もりをここで簡単に述べることにする．（鉄より）重い元素は超新星で創られた．これらの元素の生成に関するモデルは同位体成分比の見積もりに特徴がある．例をとると，比 $^{235}{\rm U}/^{238}{\rm U}$ は発生の時点で 1.65 であるべきである．$^{235}$U は $^{238}$U よ

りもはるかに崩壊が早いので，この比は連続的に減ってきている．よく知られた崩壊時間と現在の同位体の成分比（ほぼ0.007）から，われわれの銀河の寿命に対する最低限の推定値を得る．なぜなら，超新星の生成はいくつもの星の存在が前提となっているからである[13]．

さて，現在見えている宇宙の半径(50.17)を計算しよう．

$$\mathcal{D}_0 = R_0 \int_0^{t_0} \frac{c\,dt}{R(t)} = \frac{c}{H_0} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{x(\tau)} = \frac{c}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x\,(dx/d\tau)}$$

$$= \frac{c}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\mathrm{m}\,x + \Omega_\Lambda\,x^4 + \Omega_\mathrm{k}\,x^2}} \approx 44 \times 10^9\ \mathrm{ly} \qquad (53.18)$$

$D \to \mathcal{D}_0$ として，そこからの光に対しては $z \to \infty$ となる，(50.18)．すなわち，$\mathcal{D}_0$ によって地平線，**宇宙の地平線**，が与えられる．

比 $\mathcal{D}_0/t_0$ は光速を3倍上回る．しかし実際は，地平線の近くからくる光は長さ $\mathcal{D}_0$ の道程を進んでくるわけではない．というのは，考えている銀河間の距離は光の走行中はもっと短かったからである．さらにロバートソン－ウォーカー計量では，局所慣性系（そこでのみ光速はいつも $c$ に等しい）のみが存在するということを思い出してほしい．さて，距離 $\mathcal{D}_0$ にある銀河の現在の速度を示すと

$$v(\mathcal{D}_0) = c\,\dot{R}_0\,\chi = c\,\dot{R}_0 \int_0^{t_0} \frac{c\,dt}{R(t)} = H_0\,\mathcal{D}_0$$

$$= c \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\mathrm{m}\,x + \Omega_\Lambda\,x^4 + \Omega_\mathrm{k}\,x^2}} \approx 3.2\ \mathrm{c} \qquad (53.19)$$

である．50節で議論したように，このような銀河は $D \to \mathcal{D}_0$ に対して $z \to \infty$ であるので，われわれにもはや見えないのである．そのようなわけで，$\mathcal{D}_0/(c\,t_0)$ と $v(\mathcal{D}_0)/c$ に対する数値は，宇宙赤方偏移をドップラー効果として説明するのは首尾一貫していないということをもう一度示唆している．ここに生じた超光速については，50節の終わりの議論を参照してもらいたい．

[13] 訳注：星が生成されるまでの時間を考えると，実際の寿命はもっと長い．

## 質量・エネルギー密度に対する寄与

物質密度に対する数値 $\Omega_{\mathrm{m}} = 0.3 \pm 0.1$ は，（上で議論したように）銀河団に対する運動から比較的直接もたらされるし，あるいは宇宙背景放射の非等方性から間接的にもたらされる．しかし，この数値は目に見える銀河の数から出るのではない．目に見える物質（主としてバリオン）に対してはむしろ[8]

$$\Omega_{\mathrm{visible}} = 0.04 \pm 0.01 \tag{53.20}$$

を得る．これに対して残りの物質は

$$\Omega_{\mathrm{dark}} = 0.26 \pm 0.1 \tag{53.21}$$

をもたらし，これはいわゆる**ダーク・マター**である．このダーク・マターは実効的な重力を生む．それは特に銀河団を回る銀河の周回速度から測定できる．

ダーク・マターは，たとえば次の天体から成り立っているのかもしれない：冷えた白色矮星，褐色矮星，星間ガス，有限の静止質量をもつニュートリノの背景放射，超大質量ブラックホール．

(53.1)で(52.21)の $K_{\mathrm{r}}$ をもつ放射の寄与を無視した．この寄与を考慮すると，(53.4)の左辺に追加の項 $-\Omega_{\mathrm{r}}/x^2$ を得る．ここで $\Omega_{\mathrm{r}} = \varrho_{\mathrm{rad}}(t_0)/\varrho_{\mathrm{cr}}(t_0)$ である．さらに，(53.7)は $\Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\mathrm{r}} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{\mathrm{k}} = 1$ となる．現在の宇宙に対して

$$0.01 \ \leq \ \Omega_{\mathrm{r}} \ \leq \ 0.05 \tag{53.22}$$

と見積もられる．現在（$x = 1$ に対して）追加の項 $-\Omega_{\mathrm{r}}/x^2$ はかくして無視できるほどに小さい．しかし，$t \to 0$ と $x \to 0$ とに対してそれは支配的である．この項の影響は次の節でさらにくわしく調べる．

放射密度 $\Omega_{\mathrm{r}}$ は主として，今日では（静止質量ゼロ，あるいは少なくとも $p \gg m_\nu c^2$ の）ニュートリノから成っている[14]．これに対して光子の寄与分は，現在 $\Omega_\gamma \approx 0.00005$ だけである．

---

[14] 訳注：異論もある．

## 宇宙定数

### 真空エネルギー密度

宇宙定数は真空のエネルギー密度に対応している．このエネルギー密度の理論的な見積もりは，経験的な値 $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ と矛盾する結果に導く．

宇宙定数はエネルギー密度 $\varrho_\Lambda c^2 = (c^4/8\pi G)\Lambda$，(21.32)，に書き換えられる．$\Omega_\Lambda \approx 0.7$ と(53.5)とから $\Lambda \approx 2H_0^2/c^2$ が出る．これを使うと見積もり

$$\varrho_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda \approx \frac{H_0{}^2}{4\pi G} = \frac{2}{3}\varrho_{\rm cr}(t_0) \approx 0.6\times 10^{-26}\,\frac{\rm kg}{\rm m^3} \tag{53.23}$$

を得る．さて，この密度を真空のエネルギーと対比させる．量子電気力学では，電磁場のゼロ点運動は次の形の真空エネルギーをもたらす．

$$E_0 = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{\hbar\omega}{2} \sim V\hbar c\,k_{\rm max}^4 \tag{53.24}$$

類似の式は他の場に対してももたらされる．重力子を考察する量子場の理論では，波数の切断パラメター $k_{\rm max}$ はプランク長(22.31)としてよいだろう，すなわち $k_{\rm max} \sim 1/L_{\rm P} = c^{3/2}/\hbar^{1/2}/G^{1/2}$．これから

$$\varrho_{\rm vac} = \frac{E_0}{V c^2} \sim \frac{c^5}{\hbar G^2} = \frac{M_{\rm P}}{L_{\rm P}^3} \approx 5\times 10^{96}\,\frac{\rm kg}{\rm m^3} \tag{53.25}$$

を得る．ここで $M_{\rm P} = (\hbar c)^{1/2}/G = 2.2\times 10^{-8}$ kg はプランク質量である．場の量子力学が与えたこの $\varrho_{\rm vac}$ は，予想された真空質量密度の大きさである．実験的な密度 $\varrho_\Lambda$ は，この値と比べると極端に小さい．

$$\frac{\varrho_\Lambda}{\varrho_{\rm vac}} = \frac{\text{実験値}}{\text{理論値}} \approx 10^{-123} \tag{53.26}$$

実験値と理論の期待値の間の大きな破綻は，理論物理学の未解決の問題の一つである．

### ダーク・エネルギーと負の圧力

ダーク・マターに触れた小節で述べたように，エネルギー密度 $\varrho_\Lambda$ が実際は何からできているかは完全に不明である．ダーク・マターとの類似で，(53.21)を生み出すものを**ダーク・エネルギー**と言うこともある．

質量密度（それは大部分はダーク・マター密度である）は，重力的に**引力**として働く．それに対して $\Lambda$ の正の値，あるいは $\varrho_\Lambda$ は**斥力**として働く．(53.4) を $(dx/d\tau)^2 + V_{\rm eff} = {\rm const.}$ の形に書くと，$V_{\rm eff} = -\Omega_{\rm m}/x - \Omega_\Lambda x^2$ 二つの項は同じ符号をもつ．しかし，関係する力 $-dV_{\rm eff}/dx$ は相反した符号をもつ．普通の密度 $\varrho$ は圧縮の方向に働くが，密度 $\varrho_\Lambda$ は膨張の方向に働く．今日の宇宙では密度 $\varrho_\Lambda$ が支配的である．このことは，宇宙の膨張は加速されていることを意味する．

膨張あるいは収縮の際にエネルギー保存則が成り立つ．通常の質量密度あるいはエネルギー密度に対しては，このことは(52.23)によって表される．今は $\varrho_\Lambda$ の寄与を考慮したエネルギー保存を考える．エネルギー保存則に対しては一般に圧力が本質的である（(52.17)から(52.19)へ至る記述をこれと比較されたい）．密度 $\varrho_\Lambda$ に関連した圧力を $P_\Lambda$ と表す．（宇宙空間あるいは銀河群の）体積が膨張によって $\Delta V$ だけ変化するとき，関係するエネルギー変化はゼロでなければならない．すなわち，$(\varrho_\Lambda c^2 + P_\Lambda)\,\Delta V = 0$．これから

$$P_\Lambda = -\varrho_\Lambda c^2 < 0 \tag{53.27}$$

となり，よって圧力 $P$ に対して**負の値**[15)]を取り，それは(52.17)において，あるいはエネルギー運動量テンソルにおいてそうなる．

$\Lambda > 0$ に対して $\varrho_\Lambda$ も正である．それにもかかわらず，なぜこの圧力が反重力的に働くのかを負の圧力は明らかにしてくれる．( 52.11) の右辺に源の項として $\varrho c^2 + 3P$ に比例する項が現れている．今，左辺で $\Lambda$ を $\varrho_\Lambda$ によって書きなおして右辺に移項し，同時に $P$ に $P_\Lambda$ を，$\varrho$ に $\varrho_\Lambda$ を付け加える．$\varrho = \varrho_{\rm mat}$ でかつ $P_{\rm mat} \approx 0$ であるとしよう．すると(52.11)の右辺に $\varrho_{\rm mat} - 4\,\varrho_\Lambda$ を得る．これでなぜ正のエネルギー密度 $\varrho_\Lambda$ が反重力的に働くのか明らかである．もちろん運動方程式(53.4)でも，直接的に $\Omega_{\rm m}$ と $\Omega_\Lambda$ とに関連した力が互い反発して働くことがわかる．

まとめると，エネルギー密度 $\varrho_\Lambda$ の出現は不可解であり，よって“ダーク”

---

15) 圧力の符号は便宜的なものであってもよい．(38.1)では正の圧力 $P_{\rm mat}$ を使っており，それは（$P_\Lambda$ と同じように）重力圧力と釣り合っている．しかし(38.1)では，（異例ではあるが）$P_{\rm mat} < 0$ として $P_{\rm grav} + P_{\rm mat} = 0$ と書くこともできる．このかぎりでは，符号の付け方は便宜さの問題である．エネルギー保存則との関連においてはエネルギー運動量テンソルの圧力が引き合いに出される．この際，符号は一義的に定まっている．

である．反重力効果は形式的には簡単に理解されるが，物理的にはかなり驚くべきことである．

## オルバースのパラドックス

非相対論的宇宙論では，宇宙原理はオルバース(Olbers, 1758-1840)が詳述したパラドックスをもたらす．ユークリッド空間における一様性は，空間は無限に大きく，平均するとあらゆるところで星の密度は等しいということを意味する．このことは，夜空はどこでも明るいという結論に導く．実際に観測される暗い星空とのこの矛盾はオルバースのパラドックスと呼ばれている．

まず，なぜ夜空が明るくなければならないかということを述べる．そのために，中心に地球をもつ多層の球殻を考える．一つの殻は $V_i = \{\boldsymbol{R} : i \cdot \Delta R \leq R \leq (i+1) \cdot \Delta R\}$ で定義される．一様性のために，それぞれの球殻の星の数は $R^2$ で増える．球殻内の一つの星の実視光度は $R^{-2}$ で減衰する．この考察に従えば，それぞれの球殻から同じエネルギー流束がわれわれに届く．はるかに離れた星の光はより近くにある星に覆われるので，結果のエネルギー束は無限大ではない．むしろどの方向にも正確に 1 個の星を見ることになるであろう．

これをもう一度書き換えてみる．空間の小さな立体角を考える．その角度は非常に幅が狭いので，たった 1 個の星の表面の一部を見込むものとする．この立体角に入射してくる光の束は，この星がどんなに遠くともその距離には依存しない．これは，寄与する星の表面が $R^2$ に比例するという事情による．よってその星を（同じ立体角を保ちながら）遠くへ動かすと，$R^{-2}$ で減衰する光度は増大する表面で補われる．したがってどんな方向にも，平均的な星が間近にあって光を放っているかのように天空が見えることであろう．くだけた言い方をすれば，すなわち太陽が出ているかのように夜空は一面に明るいことだろう．

星間空間ガスが光を吸収するという説明では，このパラドックスは解決できない．というのは，このガスは十分に加熱されているので，吸収と放射が同じくらいに起こっているからである．

非相対論的宇宙では，宇宙原理はこのような矛盾に導く．この矛盾は相対論的宇宙モデルではどの程度まで避けられるのだろうか？

まず有限で（すなわち $k=1$ で）静的な宇宙を考える．この有限性（これは相対論で，はじめて宇宙原理と両立可能である）のために，どの立体角の方向にももはや星の表面が見えるということはなくなると考えるかもしれない．**静的**な場合は，しかしパラドックスは実際には避けられない．すなわち，“静的”という特性からどんな過去の時間間隔でも今日と同じだけの数の星があったということになる（星の寿命はそれぞれ有限であってかまわない）．一度放射された光は有限の宇宙をどこまでも広がる．それは“宇宙のなかを何回も走り回る”．よって無限回の走破は無限大の光度をもたらす．

しかしオルバース・パラドックスは，宇宙が有限の寿命をもつときには解決する．議論している宇宙モデルの枠内では，宇宙寿命は有限と決まっている．有限の寿命は，現在の膨張の逆行は尺度因子 $R=0$ に行き着くことを意味し，そしてその関係している時間はゼロと置かれる．時間 $t_0 - t_1$ の間，走行している光に対する宇宙赤方偏移は $t_1 \to 0$ に対して無限になる，(50.16)-(50.18)．よって地平線が存在し

$$D \to \mathcal{D}_0 \quad \text{に対して} \quad z \to \infty \tag{53.28}$$

のために向こう側は見えない．したがって，広大な無限の宇宙のなかで，この地平線の内側の膨大ではあるが有限の天体からの光だけがわれわれに届くのである．

# 54 標準的宇宙モデル

現在の膨張をさかのぼることは，ほとんどの宇宙モデルでロバートソン－ウォーカー計量の宇宙スケール因子 $R(t)$ を

$$R(t) \xrightarrow{t\to 0} 0 \tag{54.1}$$

とすることである．宇宙がこのような特異点から生まれたとする考えはビッグバン・モデルと呼ばれる．$R(t)$ に関する運動方程式も一緒にして，このモデルが標準的宇宙モデルである．

宇宙が膨張しているという仮説は 1927 年にルメートルによって提唱された．ハッブル定数が正であるので，宇宙の密度は昔はもっと大きかったに違いない．以下に述べるように，昔の，濃縮された宇宙に対する観測的な証拠も存在する．しかし特異点（$R = 0$）に近づくにつれて，標準的宇宙モデルは次第に憶測的なものになる．

特異点そのもの，その原因あるいは $t < 0$ の時間に関する宇宙の状態については何も言及することはできない．このように，宇宙の起源に関する深遠な疑問は答えがないままである．

## シナリオ

$R \to 0$ につれて重力エネルギーのポテンシャル $E_{\rm pot}$ は無限に負になる．質量 $\varrho R^3$ とエネルギー $E_{\rm kin} + E_{\rm pot}$ とは，(52.20) と (52.23) とによって一定である．したがって，$R \to 0$ に対しては密度 $\varrho$ と運動エネルギー $E_{\rm kin}$ とは無限大になる．密度が濃くなると（衝突のような）相互作用が発生し，それによって運動エネルギー $E_{\rm kin}$ はすべての自由度に分配される．このことは，$R \to 0$ につれて温度は発散する，すなわち，$T \to \infty$ であることを意味する．

$R$ が小さくなるにつれて温度 $T$ は桁が変わっていく．この際，いろいろな物理的な過程や効果が発生する．図 54.1 にはこれらの過程が描かれている．まず，それぞれ関係している物理的な過程を概観する．その際，現在の状態から始め，そしてその後，過去の区間を考えることにする．

1. 今日($t = t_0 \approx 13 \times 10^9$ yr)，宇宙は次の物で満たされている．

   (a) 放射（光子ガス）．それは宇宙の温度を決めている．この宇宙背景放射は以降の小節でくわしく議論される．

   (b) 物質．それはたとえば銀河や銀河間ガスの形を取る．$R > 10^{-3}\,R_0$ に対しては，この物質は基本的には放射と結合しない．この物質粒子からできているガスを考え，その温度が宇宙膨張の影響のみによって変わるとすると，われわれは，図 54.1 に $T_{\rm mat}$ によって示されている経過（点線）を得る．しかし結合が切れた後の時間区間では星と銀河の形成に至る．このように，重力収縮による**局所的な**加熱に至るので，物質の均一の温度は存在しない．星では，核融合燃焼や超新星によって重い元素が生成される．

2. $T > 3\,000$ K（あるいは $t < 4 \times 10^5$ yr）に対しては，物質は放射との平衡が生じる程度に電離する．もっと高い温度に対しては，完全に電離したプラズマが光子ガスと平衡になる．

3. $k_{\rm B}\,T \sim 10 \ldots 100$ keV（あるいは $t \sim 1$ h）に対しては，核反応が起こる．$t \sim 10^2$ s から $10^4$ s までの時間で軽い元素（水素，ヘリウム，リチウム）の原子核の生成に至る．

4. $k_{\rm B}\,T \sim$ MeV（あるいは $t \sim 2$ s）に対しては，放射光子は $E_\gamma >$ 1 MeV のエネルギーを得る．これらの光子は電子・陽電子対生成を起こすことができる．もっと高い温度に対しては別の粒子の粒子・反粒子生成が生じ，バリオンに対しては，これは $t < 10^{-4}$ s に対して可能である．（減少していく $R$ に対して）解放される重力エネルギーは，しばらくの間はこの新しい自由度に分配され，温度上昇には寄与しない．それで図 54.1 に平坦部（プラトー）が生じる．他の素粒子に対しては更なるプラトーがあり，たとえば核子・反核子生成に対して $k_{\rm B}\,T \sim 2$ GeV のあたりにプラトーがある．

5. 最後に，$R \to 0$ に対しては，温度は非常に高いので素粒子物理学の領域に入る．素粒子物理学の標準理論 SU(3)×SU(2)×U(1) は，ほぼ 100 GeV（あるいは $T = 10^{15}$ K）までの範囲で実験的にその正しさが証

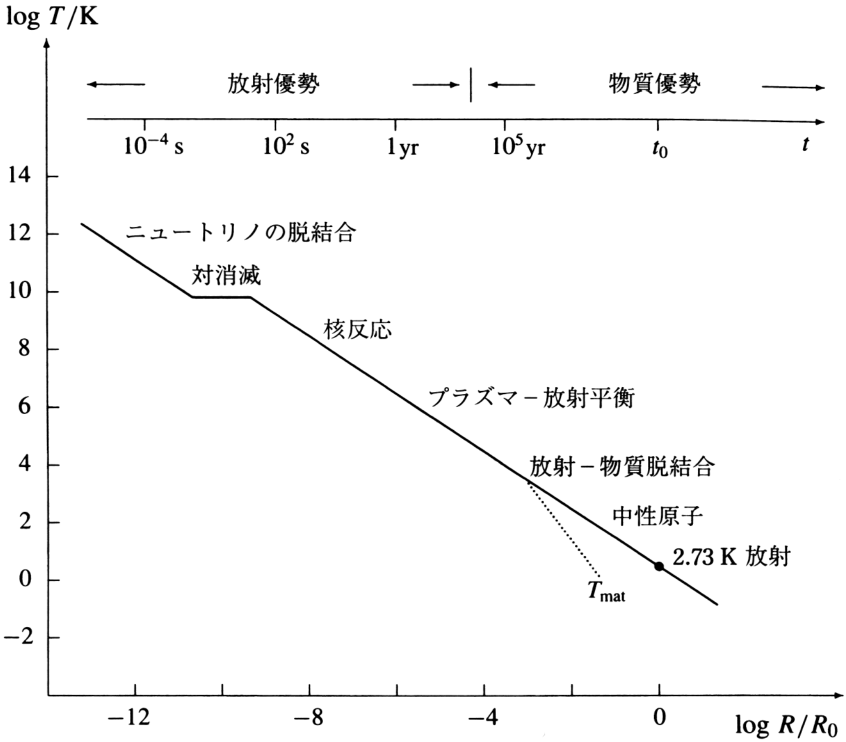



**図 54.1**: 相対値 $R/R_0$ に依存した宇宙の温度 $T$．ここで $R$ はロバートソン−ウォーカー計量のスケール因子で，$R_0$ は現在の値．典型的な銀河間の距離は $R(t)$ で測られるので，横座標の $R/R_0$ は可視領域の相対的な大きさとしても解釈できる．示されている依存性は本質的には $T \propto 1/R$ であり，現在の値 $T_0 = 2.73$ K を決める．関係している物理過程はキャッチフレーズ的に示されている．上端には関係している時間スケールが $R = R(t)$ に対して示してある．

明されている．よってこの範囲に図 54.1 のグラフを伸ばすとすれば，それはよく知られた物理プロセスに依ることになり，さらに外挿すればますます推測的になる．いわゆる大統一理論(GUT)では弱い相互作用，強い相互作用，電磁相互作用が統合され，$k_{\mathrm{B}}T = 10^{14}$ GeV のエネルギー領域の現象が予測される．このようなエネルギーに対しては，極端に初期($t < 10^{-35}$ s)の宇宙がことによると唯一の考えられる実験室である．最後に，$t \le L_{\mathrm{P}}/c = (G\hbar/c^5)^{1/2} \approx 5 \times 10^{-44}$ s に対して

は，重力自身の量子効果が重要になる．

6. 古典的な一般相対論では（$T=\infty$ の）$R=0$ の特異点は避けられない．この特異点からの宇宙の発生は**ビッグバン**と呼ばれている．

図 54.1 で特徴づけられるモデルは，**（宇宙）標準モデル**あるいはビッグバンモデルとも呼ばれている．このとき，どの時間まで（ゼロの近くで）このモデルが厳密に通用するのかは明らかではない．すでに述べたように，外挿は結局非常に推量に頼ることになる．

## 温度の尺度

温度 $T$ と宇宙スケール因子 $R(t)$ の間の関係を定めることにする．

宇宙は放射（光子）で満ちており，その光子は温度 $T$ のプランクの平衡分布に従っている．この記述は次の小節でもっとくわしく基礎づけられるであろう．この $T$ を宇宙の温度であると考える．結合が切れる前は（すなわち $R<10^{-3}\,R_0$ のときは）これは宇宙の物質の平衡温度でもあった．結合が切れた後は，それは宇宙で唯一のはっきりと定義された温度である．

放射のエネルギー密度 $\varrho_{\rm rad}\,c^2$ はシュテファン－ボルツマン則 (Stefan-Boltzmann law)

$$\varrho_{\rm rad}\,c^2 = a\,T^4\,, \qquad a=\frac{\pi^2\,k_{\rm B}^4}{15\,\hbar^3\,c^3} \tag{54.2}$$

で与えられる．(52.20) によって

$$\varrho_{\rm rad} = \frac{3\,c^2}{8\,\pi\,G}\,\frac{K_{\rm r}}{R^4} = \frac{\rm const.}{R^4} \tag{54.3}$$

が成り立つ．この二つの式から

$$T \,\propto\, \frac{1}{R} \tag{54.4}$$

が出る．対数表示では，これは勾配 $-1$ の直線である．これと現在の温度の値とから，図 54.1 に示された $T$ と $R$ の間の広範囲に及ぶ関係が定められる．

物質と放射の間の結合が切れると物質は別の温度をもつことができる．それを見るために，質量 $m$ で平均運動量 $p$ の非相対論的粒子（たとえば中性原

子）を考える．これらの粒子が熱的に平衡であるかぎり，ある温度 $T_{\rm mat}$ がそれぞれに割り当てられる．

$$k_{\rm B}\,T_{\rm mat} \approx \frac{p^2}{2\,m} \overset{(50.6)}{\propto} \frac{1}{R^2} \tag{54.5}$$

これは図 54.1 で勾配 $-2$ の直線を与える．しかし考えている領域（$R > 10^{-3}\,R_0$）では，全宇宙的にはっきりと定義された物質の温度は存在しない（上の項 1. (b) を見よ）．

図 54.1 では一貫して(54.4)を使っている（対生成の挿入が原因であるプラトーまで）．そのための前提とされた保存則 $\varrho_{\rm rad}\,R^4 = {\rm const.}$，(54.3)は，しかしながら結合が切れた後（$R > 10^{-3}\,R_0$ に対して）あるいは放射優勢（$R < 3\times10^{-4}\,R_0$ に対して）の場合に成り立つ．中間領域 $3\times10^{-4} \lesssim R/R_0 \lesssim 10^{-3}$ では $T \propto 1/R$ からのずれがありうるが，これは定性的な全体図にとっては何の役割も果たさない．放射優勢と脱結合に対する時間は後の小節 "時間の尺度" で計算される．

## 宇宙背景放射

荷電粒子（素粒子，イオンあるいは電子）に対しては，電磁相互作用は粒子と光子の間の熱力学的平衡をもたらす．温度が約 3000 K を下回ると中性原子が盛んに生成される．そうなると荷電粒子の密度は非常に少なくなるので，放射と物質は事実上**結合が切れる**．結合が切れたすぐの時点では，共通の温度をもつ物質と放射の平衡分布が存在する．物質粒子に対してはこれはボルツマン分布であり，光子にとってはプランクの放射分布である．結合が切れた後は，双方の分布はお互い独立に進展する．

さて，結合が切れた後のプランクの放射分布の進展を調べることにする．この段階では，吸収過程あるいは放射過程，または光子 – 光子の散乱は何ら本質的な役割を演じない．また，宇宙の膨張の際にはプランク分布の形は保持されるということを示そう．すなわち膨張は，単に分布の温度は時間の経過につれて低くなるという結果をもたらすだけである．

結合が切れた時間を $t_{\rm d}$ としよう．$\omega'$ と $\omega' + d\omega'$ との間の振動数をもつ光

子の密度（体積あたりの数）は

$$n'(\omega', t_{\rm d})\,d\omega' = \frac{1}{\pi^2 c^3}\;\frac{\omega'^2\,d\omega'}{\exp(\hbar\omega'/k_{\rm B}T_{\rm d}) - 1} \tag{54.6}$$

である．ここで $T_{\rm d} = T(t_{\rm d}) \approx 3\,000$ K である．さて，宇宙の膨張による分布の変化を計算する．

光子の振動数の変化は(50.5)で与えられる．時間 $t_{\rm d}$ におけるある光子の振動数を $\omega'$ とすると，時間 $t$ のこの光子の振動数 $\omega$ は

$$\omega = \omega'\;\frac{R(t_{\rm d})}{R(t)} \tag{54.7}$$

である．これは宇宙赤方偏移を記述している．

光子の密度 $n(\omega, t)\,d\omega$ は体積あたりの数であり，よって $n \propto 1/R^3$ の関係にある．これから

$$n(\omega, t)\,d\omega = \left[\frac{R(t_{\rm d})}{R(t)}\right]^3 n'(\omega', t_{\rm d})\,d\omega' \tag{54.8}$$

が出る．ここで(54.6)を使って $n'\,d\omega'$ を置き換え，(54.7)によって $\omega'$ を消去する．結果は

$$n(\omega, t)\,d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3}\;\frac{\omega^2\,d\omega}{\exp(\hbar\omega/k_{\rm B}T) - 1} \tag{54.9}$$

となる．ここで

$$\boxed{T = T(t) = T_{\rm d}\;\frac{R(t_{\rm d})}{R(t)} \qquad \text{宇宙背景放射の温度}} \tag{54.10}$$

である．このようにして，特別な相互作用過程を必要としないで，宇宙の膨張によってプランク分布が再び別のプランク分布に変換される．膨張はその際，時間依存性がある放射温度

$$T(t) \propto \frac{1}{R(t)} \tag{54.11}$$

をもたらす．物質と放射の脱結合は比較的初期の時点 $t_{\rm d}$ で起こり，次の小節で $t_{\rm d} \approx 4\times10^{-5}\,t_0$ であることを導く．この初期宇宙のプランク放射分布が，

時間の経過につれて低くなった温度 $T(t_0)$ をもって，今でも存在しているはずである．そしてこのような背景放射は，1940 年代の終わりに予言されている．すなわち，アルファー(Alpher)とハーマン(Herman)は 1949 年，温度 $T(t_0)$ を 5 K と見積もった[16)]．それに関する物理的な基礎はガモフ(Gamow)の仕事に依っている．ペンジアス(Penzias)とウィルソン(Wilson)[17)]は 1965 年，このようなほぼ 3 K の温度をもつ**宇宙背景放射**を発見した．その際，まずある波長($\lambda = 7.35$ cm)の放射だけが検出された．そして測られた強度は(54.9)によって温度に焼きなおされた．それから周波数依存性を調べる多くの計測がなされ，周波数分布が実際にプランク分布で，しかも温度が

$$T_0 = T(t_0) = 2.725 \pm 0.001\,\mathrm{K} \qquad \text{宇宙背景放射の現在の温度} \tag{54.12}$$

であるということが確認された[18)]．背景放射の現在のエネルギー密度 $\varrho_{\mathrm{rad}}(t_0)$ を定めるには，プランク分布(54.9)あるいはシュテファン－ボルツマン則(54.2)を使う．

$$\varrho_{\mathrm{rad}}(t_0) = \frac{1}{c^2}\int_0^\infty d\omega\ \hbar\omega\ n(\omega,\, t_0) = \frac{\pi^2\, k_{\mathrm{B}}^4}{15\,\hbar^3\, c^3}\ T_0^4 = 4.8 \times 10^{-31}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \tag{54.13}$$

われわれの銀河の固有運動に基づくドップラー効果を差し引くと，背景放射は広い範囲で等方であることが示される．いろいろな方向からの放射をそのつど $T(\theta,\phi)$ に割り当てると，ほぼ 1 度の角度の幅のなかで

$$\frac{\Delta T}{T_0} \sim 10^{-5} \tag{54.14}$$

の大きさのゆらぎを得る．完全な等方性からのずれはとりわけ興味深い．すなわち，脱結合の時点の宇宙が完全に等方であったとすると，このことは現在の背景放射に対しても成り立つはずである．しかし実際は，そのころわずかな密度のゆらぎがあって，重力の影響のもとでそれは時間の経過のなかで強化され，銀河や銀河団の形成に至った．そのころのゆらぎは，放射密度にも

[16)] R. A. Alpher and R. C. Herman, Phys. Rev. 75 (1949) 1089.
[17)] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophys. J. 142 (1965) 419. ペンジアスとウィルソンは 1978 年，その発見によってノーベル賞を授与された.
[18)] C. H. Linewaver, *Cosmological Parameters*, ⟨www.arxiv.org⟩ arXiv:astro-ph/0112381.

物質密度にも同じ程度に存在していた．脱結合の後，放射の進化は大域的な宇宙パラメターからだけで定められた．より正確に検討すると，この進化は基本的にはただ単に曲率だけに依存しているということがわかる．その際，正の曲率は収束的に働き（たとえば球の上の（大円に沿う）2 本の光線は最後には再び近づく），負の曲率はこれに反して発散的に働く．それに対応して角度分布での隣接した極大の距離が増大（減少）する．53 節で議論したように，実験（Boomerang と Maxima-1）の解析は，空間の曲率はゼロかあるいはそうでなくとも小さい（$\Omega_{\mathrm{k}} \approx 0$）という結果に導く．

現在の $T(\theta,\phi)$ のわずかな角度依存性は，脱結合の時点 $t_{\mathrm{d}}$ で宇宙は**非常に一様で等方**であったに違いないということを意味している．今日観測されている広い範囲の一様でかつ等方な背景放射は，よってまた宇宙原理の正当化でもある．銀河が存在しているという事実は，一様性と等方性からのずれを示唆している．われわれの宇宙モデルは，この（当然重要な）ずれを含んでいない．なぜなら，それは十分に大きな長さで平均された後では小さくなるからである．

観測点の固有運動に起因するドップラー効果は，温度 $T(\theta,\phi)$ の見かけの非等方性をもたらす．この非等方性からわれわれの固有運動を定めることができる（51 節の最後の小節を見よ）．これによって宇宙背景放射は，いわば一種の“絶対基準枠”を提供し，それに相対的にわれわれの速度を定義することができる．しかしこれはマッハ原理に従うと，他の対象（背景放射と結局は銀河全体）との相対的な運動であり，抽象的な何らかの絶対空間に相対的な運動ではない．しかしながら空間の計量（すなわちロバートソン－ウォーカー計量）は現存している物質と緊密に結びつけられ，特に簡単な方法で背景放射と関連づけられている．

特殊相対論を適用することができるかぎりは，“背景放射に対して静止している”基準系を特別扱いしても相対性原理を損なうことはない．相互に相対的に運動している慣性系の同等性は基本的な物理法則に対してだけ成り立つのであって，（質量あるいは放射のような）実際に現存する対象に関して成り立つのではない．

$T \sim 10^{11}$ K になって物質との熱平衡から結合が切れるニュートリノに対

しても宇宙背景放射があってしかるべきである．それは今日，温度 $T \approx 1.9$ K で特徴づけられる，ある分布をもっているはずである．また同時に，重力子から成る背景放射もあってよいだろう．

## 時間の尺度

われわれの宇宙の時間的な進展は，運動方程式(52.21)あるいは(53.4)で与えられる．この運動方程式の解(53.15)は，分母に項 $\Omega_{\rm r}/x'^2$ を付け加えても複雑さが増すことはない．この放射項は $x \ll 1$ のとき，すなわち宇宙の初期に重要になる．式の数値解の代わりに，以下で簡単な解析的な近似を考えたい．この近似で，図 54.1 のシナリオに現れているいくつかの時間を見積もる．

宇宙の曲率は非常に小さいので，宇宙スケール因子 $R(t)$ に対する運動方程式では，それは何の役割も果たさない．よって $k=0$ と置いた(52.21)から始める．

$$\dot{R}^2 = \frac{K_{\rm r}}{R^2} + \frac{K_{\rm m}}{R} + \frac{1}{3}\,\Lambda\,R^2 \qquad (54.15)$$

各項の $R$ の巾（べき）から，初期の時間あるいは小さな $R$ に対して放射項が優勢であり，それに反して後期の時間と大きな $R$ に対しては $\Lambda$ 項が優勢であることがわかる．その中間では物質項がもっとも重要である．その時々の重要な項を考察して次の運動方程式と解の形を得る．

$$\dot{R}^2 \sim \begin{cases} K_{\rm r}/R^2 \\ K_{\rm m}/R \\ \Lambda\,R^2/3 \end{cases}, \qquad R(t) \propto \begin{cases} t^{1/2} & (0 < t < t_1) \\ t^{2/3} & (t_1 < t < t_2) \\ \exp\left(\sqrt{\Lambda/3}\;c\,t\right) & (t_2 < t) \end{cases} \qquad (54.16)$$

続いて，移行時間 $t_1$（放射から物質優勢）と $t_2$（$\Lambda$ 項優勢への移行）とを見積もる．そのために(54.3)も参考にして，まず(54.15)の右辺の各項を力に換算し，各力の比を現時点で計算する．

$$\left.\frac{2\,K_{\rm r}/R^3}{K_{\rm m}/R^2}\right|_{t_0} = \frac{2\,\varrho_{\rm rad}(t_0)}{\varrho_{\rm mat}(t_0)} \approx 3\times 10^{-4} \tag{54.17}$$

$$\left.\frac{\Omega_{\rm m}/x^2}{2\,\Omega_\Lambda\,x}\right|_{t_0} = \frac{\Omega_{\rm m}}{2\,\Omega_\Lambda} \approx 0.2 \tag{54.18}$$

力は $R$ あるいは $x$ に関するそれぞれの項の微分であるので，係数 2 が出てくる．放射密度 $\varrho_{\rm rad}(t_0) \approx 4.8\times 10^{-31}$ kg/m$^3$ は(54.13)で与えられている．物質密度 $\varrho_{\rm mat}(t_0) = \Omega_{\rm m}\,\varrho_{\rm cr}(t_0) \approx 3.1\times 10^{-27}$ kg/m$^3$ は(53.5)と(53.6)，(53.13)とから出る．(54.18)で，(53.4)の記号と $x\,(t_0) = 1$ と(53.13)からの値を使った．

移行時間 $t_1$ と $t_2$ とは

$$\frac{2\,K_{\rm r}/R\,(t_1)^3}{K_{\rm m}/R\,(t_1)^2} = 1 \quad\longrightarrow\quad R\,(t_1) \approx 3\times 10^{-4}\,R_0 \tag{54.19}$$

$$\frac{\Omega_{\rm m}/x\,(t_2)^2}{2\,\Omega_\Lambda\,x\,(t_2)} = 1 \quad\longrightarrow\quad R\,(t_2) \approx (0.2)^{1/3}\,R_0 \approx 0.6\,R_0 \tag{54.20}$$

から生じる．上の二つの式では，左辺の条件と(54.17)と(54.18)の値から比 $R/R_0$ を導くことができる．

放射優勢から物質優勢への移行は非常に早く（$R\,(t_1) \ll R_0$）に起こるが，それに反して $\Lambda$ 項優勢へのさらなる移行はずっと遅く（$R\,(t_2) \sim R_0$）起こる．現在の $\Lambda$ 項優勢はよってまだ強く表れてはいない．

宇宙の温度がほぼ 3 000 K になったら放射と物質の結合は切れる．$T\,(t) \propto 1/R\,(t)$，(54.11)，と現在の放射温度を使って

$$\left.\begin{array}{lcl} T\,(t_0) & \approx & 3\ {\rm K} \\ T\,(t_{\rm d}) & \approx & 3\,000\ {\rm K} \end{array}\right\} \longrightarrow R\,(t_{\rm d}) = \frac{T\,(t_0)}{T\,(t_{\rm d})}\,R_0 \approx 10^{-3}\,R_0 \tag{54.21}$$

を得る．よって議論してきた移行時間に対する半径 $R\,(t_1)$ と $R\,(t_2)$，$R\,(t_{\rm d})$ が定まった．今やわれわれは時間そのものを議論できるようになった．

(54.16)の最初の行，$(d\,R/d\,(c\,t))^2 = K_{\rm r}/R^2$，の解は

$$R\,(t) \approx \left(4\,K_{\rm r}\,c^2\right)^{1/4}\sqrt{t} \approx R_0\,\sqrt{\frac{t}{10^{12}\,{\rm yr}}} \tag{54.22}$$

である．最右辺を得るために，(54.13)の $\varrho_{\rm rad}(t_0)$ を(52.20)に使って $K_{\rm r}$ を見積もった．(54.22)を使って $t_1$ を決めると

$$t_1 = \left(\frac{R(t_1)}{R_0}\right)^2 10^{12}\,{\rm yr} \overset{(54.19)}{=} \left(3\times 10^{-4}\right)^2 10^{12}\,{\rm yr} \approx 10^5\,{\rm yr} \qquad (54.23)$$

(54.16)の 2 行目の式，$(dR/d(ct))^2 = K_{\rm m}/R$，の解は $R(t) = {\rm const.}\cdot t^{2/3}$ である．まとめると

$$R(t) \approx R_0 \cdot \begin{cases} \sqrt{\dfrac{t}{10^{12}\,{\rm yr}}} & (0 \le t < 10^5\,{\rm yr}) \\ \left(\dfrac{t}{15\times 10^9\,{\rm yr}}\right)^{2/3} & (10^5\,{\rm yr} < t \le t_0/2) \end{cases} \qquad (54.24)$$

となる．これは簡単な近似であり，それは移行の領域で不正確でもある．$R(t) = C\,t^{2/3}$ の係数 $C$ の見積もりには二つの可能性がある．(i) 時間 $t_1 = 10^5$ yr における 1 行目の解との連続な接続は $C = R_0/(18\times 10^9\,{\rm yr})^{2/3}$ を与える．(ii) $t_0$ まで $R(t) = C\,t^{2/3}$ を伸ばすと $C = R_0/(t_0)^{2/3} = R_0/(13\times 10^9\,{\rm yr})^{2/3}$ となる．(54.24)の 2 行目では平均値をあてている．解 $R(t) = C\,t^{2/3}$ に対する上限 $t_2$ は(54.20)から生じる．

$R(t)$ に対する正確な解は，放射項をそこに挿入すれば(53.15)から得ることができる．しかし図 53.1 において，放射項 $\Omega_{\rm r}/x'^2$ によるずれは目には見えないだろう．というのは，それはゼロ点の側の約 0.001 mm の領域に現れるからである（$t_1/t_0 < 10^{-5}$ のために）．この領域では，解は $R(t) \propto t^{2/3}$ から $R(t) \propto t^{1/2}$ に代わるであろう（両方の関数は垂直の接線で出発する）．放射の寄与は宇宙の年齢に対するわれわれの結果(53.16)も変えることはない．

脱結合の時点 $t_{\rm d}$ を定めるために，解 $R(t) \propto t^{2/3}$ を利用する．時間的に 5 桁の飛びをつなぐことを考えると，$t_0/2$ を $t_0$ に引き延ばしても本質的な影響はない．$t \propto R^{3/2}$ から

$$t_{\rm d} = \left(\frac{R(t_{\rm d})}{R_0}\right)^{3/2} t_0 \overset{(54.21)}{\approx} 10^{-3\times(3/2)}\,13\times 10^9\,{\rm yr} \approx 4\times 10^5\,{\rm yr} \quad (54.25)$$

が出る．よって放射と物質の脱結合は，放射優勢から物質優勢の宇宙への移行より幾分遅く起こることになる．

## 標準的宇宙モデルの問題点

ここで述べた標準的宇宙モデルは，部分的には観測で裏づけられており，部分的には推測的である．それ以外にこのモデルは新しい未解決の問題をもたらす．

標準的宇宙モデルは $R(t)$ の運動方程式と現在の膨張率 $H_0 = c\dot{R}(t_0) / R(t_0) > 0$ に基づいている．背景放射によって放射平衡の存在が証明され，それをモデルに当てはめた予測によって，脱結合の時間 $t \le t_\mathrm{d} \approx 4 \times 10^5$ yr が観測的に裏づけられている．現在の時間 $t_0$ で計れば，この時間は非常に初期の時間，$t_\mathrm{d} \approx 3 \times 10^{-5}\, t_0$ である．ここでは説明していないが，宇宙における元素の分布は，$t > 1$ s の領域に対するモデルの確認として役立たせることができる．その前の領域への外挿はますます推測的になる．しかし，標準的モデルは推測的でない領域でも問題がある．そのうちの二つをここで紹介する．

### 平坦性問題

現在の宇宙の状態の議論のために，(53.4) でハッブル定数と他の量（たとえば $\varrho_\mathrm{cr}$）を特に現時点 $t_0$ に関連させた．今，$t_0$ の代わりに任意の初期の時点 $t$ を取り上げ，(53.4) に関する議論を一部繰り返す．

まず，時間 $t$ に対するハッブル定数 $H(t)$ と臨界密度 $\varrho_\mathrm{cr}(t)$ を考察する．

$$\frac{H(t)}{c} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \qquad \varrho_\mathrm{cr}(t) = \frac{3\,H(t)^2}{8\pi G} \tag{54.26}$$

密度 $\varrho(t) = \varrho_\mathrm{mat}(t) + \varrho_\mathrm{rad}(t)$ において，初期には大きな値をもつ放射密度の寄与を考慮しなければならない．よって $\Omega_\mathrm{m}$ を $\Omega = \Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{r}$ で置き換えると定義 (53.5) は

$$\Omega(t) = \frac{\varrho(t)}{\varrho_\mathrm{cr}(t)}, \qquad \Omega_\Lambda = \frac{1}{3}\,\frac{\Lambda c^2}{H(t)^2}, \qquad \Omega_\mathrm{k} = -\frac{k\,c^2}{R(t)^2\,H(t)^2} \tag{54.27}$$

となる．変数 $x(t') = R(t')/R(t)$ に対して，(53.4) の形の方程式を再び立てることができる．このとき，$t' = t$ に対しては再び $x = 1$ と $dx/d\tau = 1$ とが

成り立つ．よって(53.7)に類似の関係式

$$\boxed{\Omega(t)+\Omega_\Lambda(t)+\Omega_{\mathrm{k}}(t)=1} \tag{54.28}$$

を得る．宇宙の初期に対して，すなわち $t \to 0$ に対して，図 53.1 から

$$R(t) \xrightarrow{t\to 0} 0, \quad \dot{R}(t) \xrightarrow{t\to 0} \infty, \quad H(t) \xrightarrow{t\to 0} \infty,$$
$$H(t)\,R(t)=c\,\dot{R}(t) \xrightarrow{t\to 0} \infty \tag{54.29}$$

を読み取る．この記述は $k \neq 0$ に対しても成り立つ．これらから今や

$$\Omega_\Lambda(t) \xrightarrow{t\to 0} 0, \quad \Omega_{\mathrm{k}}(t) \xrightarrow{t\to 0} 0, \quad \Omega(t) \xrightarrow{t\to 0} 1 \tag{54.30}$$

が出る．前の二つの記述は(54.29)から出るし，最後の記述は(54.28)から出る．

初期の時間に対して臨界値の極端な近似が存在する．(53.13)によると，$\Omega_\Lambda(t_0) \approx 0.7$ である．$R(t) \propto t^\nu$ ((54.24)と比べよ）に対して $1/H(t) \propto t$ であり，すなわち $\Omega_\Lambda(t) \propto t^2$ である．よって

$$t=1\,\mathrm{s}\ \text{に対して}\quad \Omega_\Lambda(t) \approx \Omega_\Lambda(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 \lesssim 10^{-32} \tag{54.31}$$

が成り立つ．類似の結果を $\Omega_{\mathrm{k}}(t)$ に対しても得る．というのは，$1/(R^2 H^2)$ は $R(t) \propto t^{2/3}$ に対して $t^{2/3}$ のように振る舞い，$R(t) \propto t^{1/2}$ に対しては $t$ のように振る舞う．この際，最初から $\Omega_{\mathrm{k}}(t_0) \neq 0$ を排除することはしないが，(53.12)によって $\Omega_{\mathrm{k}}(t_0)$ はほとんどゼロに等しい．(54.28)の結果として $|\Omega(t)-1|$ は $t=1$ s のとき極端に小さい値を取る．

したがって，正確な現在の宇宙パラメターに関係なく，初期宇宙は極端に平坦で質量密度はほぼ正確に臨界質量密度に等しく，そして $\Omega_\Lambda$ はほとんど正確にゼロに等しかった．量 $\Omega_\Lambda$ と $\Omega_{\mathrm{k}}$，$|\Omega-1|$ がほとんど正確にゼロであったということに対しては，標準的宇宙モデルでは何らの説明もできないのである．

われわれは時間的に逆行して議論することもできる．すなわち，初期宇宙において $\Omega_\Lambda$ と $\Omega_{\mathrm{k}}$，$|\Omega-1|$ がゼロからわずかしかずれていなかったということは，これらの量が現在も小さいままである理由にならず，大きな値になって

いてもいいはずである．このことから，現在の宇宙パラメター量 $\Omega_\Lambda$ と $\Omega_{\rm k}$，$|\Omega-1|$ の小ささ（すべて 1 より小さい）は謎と見られている．この解明ができないために，これは（曲率と関連して）“平坦性”の問題と呼ばれている．

類似の問題に密度ゆらぎの問題がある．すなわち，最初の非常に小さい密度のゆらぎは重力の影響で増大する．しかし，全体として現在のような物質分布の一様性，特に背景放射の等方性は考えられないくらいの一様な初期宇宙を標準的モデルでは要求する．しかし紹介した標準的モデルには，この一様性を説明できるような“平坦化”機構は何も存在しない．

## 地平線問題

われわれに現在見えている宇宙の領域は半径 $\mathcal{D}_0$ をもっている．そして以前は，この領域は次の半径

$$\mathcal{D}\,(t)=\mathcal{D}_0\,\frac{R\,(t)}{R_0}\ \stackrel{(50.17)}{=}\ R\,(t)\int_0^{t_0}\frac{c\,d\,t}{R\,(t)} \tag{54.32}$$

をもっていた．時間 $t$ におけるわれわれの場所と因果的につながる領域の半径を $\mathcal{D}_{\rm caus}(t)$ と表すことにする．この量は光が 0 から $t$ までの時間の間に進む距離から生じる．

$$\mathcal{D}_{\rm caus}(t)=R\,(t)\int_0^{t}\frac{c\,d\,t'}{R\,(t')} \tag{54.33}$$

この二つの式を比べると

$$\mathcal{D}_{\rm caus}(t)<\mathcal{D}(t)\qquad (t<t_0\ \text{に対して}) \tag{54.34}$$

であることが示されている．このことは，現在われわれに見えている領域の一部分だけが以前は因果的に結びついていたということを意味する．大まかな見積もりのために，結合解除の後の時間に対して $R\,(t)={\rm const.}\cdot t^{2/3}$ を使う．よって

$$\frac{\mathcal{D}_{\rm caus}(t)}{\mathcal{D}\,(t)}=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3}\ll 1\qquad (t\ll t_0\ \text{に対して}) \tag{54.35}$$

を得る．特に脱結合の時点 $t = t_{\mathrm{d}} \approx 4 \times 10^5$ yr に対して，$\mathcal{D}^3 \approx 3 \times 10^4\, \mathcal{D}^3_{\mathrm{caus}}$ が成り立つ．このようにして，現在われわれに見えている領域は，その当時ほぼ $3 \times 10^4$ 個の因果的にお互い無関係な空間領域から成り立っていた．

このことは次の問題をもたらす．すなわち，因果関係が欠落していたにもかかわらず，宇宙背景放射が広範囲にわたって等方である，(54.14)，というのは理解困難である．これらの放射は，現在われわれに見えている領域から来ている．この等方性，言い換えれば可視領域の放射の等温性に対しては，他ならぬこの領域内の初期の平衡がそのまま反映されているはずである．しかし静的な平衡は，因果的なつながりを前提としている．

標準的宇宙モデルは，ここで述べている宇宙の平坦性，等方性，一様性と矛盾してはいない．問題はむしろ，このモデルはこれらの本質的な諸特性を説明していないというところにある．

この問題の解決に対する提案はインフレーション宇宙のモデルである．極端な初期($t < 10^{-30}$ s)には，大統一理論(GUT)は(52.21)で $\Lambda R^2$ が支配項になるような大きな真空エネルギー密度をもたらす．これは(52.27)に与えられたような指数関数的膨張（インフレーション）を引き起こす．これによって，小さくかつ一様な領域から非常に短い時間で，同様に一様でしかし因果的につながりがない数十乗も大きな領域が発生することができるのである．この領域は，宇宙の一部に対してきわめて平坦で一様な（ほぼ $t = 10^{-30}$ s の）初期状態となり，その部分が時の経つうちにわれわれに見えている領域に拡大したと考えられる．

# 演習の解答

解答の番号は本文中の対応する問題番号と同じである．問題自身はここでは繰り返さない．解答の式番は通しで打たれている．

## 4.1　宇宙旅行の際の時間遅れ

運動の方向として $x$-軸を選び，かつ初期条件は $x(0) = 0$ と $v(0) = 0$ とする．ここで $v(t) = dx/dt$ である．

一定加速の場合はニュートンの力 $F_{\rm N}^1 = M\,g$ が宇宙飛行士に働く．(4.7)によって $F^1 = \gamma\,M\,g$ が(4.4)の右辺に置き換えられる．左辺では $d/d\tau = \gamma\,d/dt$ と $u^1 = \gamma\,v$ とを代入する．$\gamma$-係数は約分できて

$$\frac{d}{dt}\,\frac{v(t)}{\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}} = g$$

を得る．積分すると

$$v(t) \;=\; \frac{g\;\;t}{\sqrt{1 + g^2\,t^2/c^2}} \qquad \text{そして} \qquad x(t) = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{g^2\,t^2}{c^2}}\; - 1\right) \tag{A.1}$$

となる． $x$-$t$-ダイアグラムでは，これは非相対論の場合の放物線 $x = g\,t^2/2$ に対して**双曲線**になる．よってこれを“双曲線運動”とも言う．速度は光速に漸近的に近づくが，エネルギーは増加する．

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;=\; m\,c^2\,\sqrt{1 + \frac{g^2\,t^2}{c^2}}$$

これによって時間的な遅延係数を定めることができる．

$$d\tau = dt\,\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1 + g^2\,t^2/c^2}}$$

これを積分すると

$$\tau = \frac{c}{g}\,\mathrm{arcsinh}\,\frac{g\,t}{c} \qquad \text{あるいは} \qquad t = \frac{c}{g}\,\sinh\,\frac{g\,\tau}{c}$$

となる．$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ に対して $c/g \approx 0.97$ 年が成り立つ．よって $\tau = 5$ 年に対して $t \approx 84$ 年を得る．四つの旅行区間に関して，$dt$ と $d\tau$ の間の遅延係数 $(1-v(t)^2/c^2)^{1/2}$ はそれぞれの時間区間で同じ値を取る．よって帰還した際には

$$t \approx 336\,\text{年} \quad \text{そして} \quad \tau = 20\,\text{年}$$

が成り立つ．地球にいた双子の一人は，帰ってきたもう一人に比べるとほぼ 316 年歳を取っている．（A.1）から最初の行程での宇宙船の距離は $x(\tau = 5\,\text{年}) \approx 83$ 光年である．地球からの最大の距離はよってほぼ 166 光年である．加速度によってほぼ 1 年後に速度は $v \approx c$ に達する．絶え間ない加速は速度を上げるわけではなく，そして最終的な距離を伸ばすわけでもない．それは比 $t/\tau$ を大きくするのである．

この結果は双子のパラドックスと呼ばれている．**パラドックス**と呼ぶのは次の問題提起からその理由がわかる．宇宙飛行士から見ると地球は $-v(t)$ で動いている．したがって，宇宙飛行士から見た $v(t)^2$ はこれまでに求めた値と同じはずである．よって地球上の時計は宇宙船の時計に対して遅れてはいけないのではないか？

宇宙船は慣性系ではないから，今述べたことは正しくない．これに反して地球は（近似的に）慣性系であるので，地球の基準系では特殊相対論の法則（特に $d\tau = (1-v^2/c^2)^{1/2}\,dt$）が適用できる．

## 5.1　2 階のローレンツ・テンソル

仮定によって $V^\alpha = T^{\alpha\beta} W_\beta$ がどの慣性系でも成り立つ．すなわち，IS$'$ でも $V'^{\alpha} = T'^{\,\alpha\beta}\, W'_\beta$．ここでよく知られた変換

$$V'^{\,\alpha} = \Lambda^\alpha_\gamma\, V^\gamma\,, \qquad W'_\beta = \bar\Lambda^\delta_\beta\, W_\delta$$

から

$$\Lambda^\alpha_\gamma\, V^\gamma = T'^{\,\alpha\beta}\, \bar\Lambda^\delta_\beta\, W_\delta$$

を得る．式の両辺に $\bar\Lambda^\mu_\alpha$ を掛け，$\bar\Lambda^\mu_\alpha\, \Lambda^\alpha_\gamma = \delta^\mu_\gamma$ を使うと

$$V^\mu = \bar\Lambda^\mu_\alpha\, T'^{\,\alpha\beta}\, \bar\Lambda^\delta_\beta\, W_\delta = T^{\mu\delta}\, W_\delta$$

を得る．これから $\bar{\Lambda}^{\mu}_{\alpha}\, T'^{\,\alpha\beta}\, \bar{\Lambda}^{\delta}_{\beta} = T^{\mu\delta}$ となり，あるいは $\Lambda^{\nu}_{\mu}$ と $\Lambda^{\gamma}_{\delta}$ に関する縮約から

$$T'^{\,\nu\gamma} = \Lambda^{\nu}_{\mu}\, \Lambda^{\gamma}_{\delta}\, T^{\mu\delta}$$

となる．すなわち，$T^{\alpha\beta}$ は 2 階のローレンツ・テンソルとして変換される．

## 5.2　ミンコフスキー空間のレビ–チビタ・テンソル

行列式の定義は

$$(\det\Lambda) \;=\; \Lambda^{0}_{\alpha}\, \Lambda^{1}_{\beta}\, \Lambda^{2}_{\gamma}\, \Lambda^{3}_{\delta}\; \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

である．これを考慮すると

$$\begin{aligned}
\epsilon'^{\,\alpha\beta\gamma\delta} &= (\det\Lambda)\, \Lambda^{\alpha}_{\alpha'}\, \Lambda^{\beta}_{\beta'}\, \Lambda^{\gamma}_{\gamma'}\, \Lambda^{\delta}_{\delta'}\, \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \\
&= (\det\Lambda)\, \Lambda^{0}_{\alpha''}\, \Lambda^{1}_{\beta''}\, \Lambda^{2}_{\gamma''}\, \Lambda^{3}_{\delta''}\, \epsilon^{\alpha''\beta''\gamma''\delta''}\; \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\
&= (\det\Lambda)^2\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \;=\; \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}
\end{aligned}$$

を得る．ところで，ローレンツ変換は条件 $\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\,\Lambda = \eta$ を満たす．行列式を作ると，これにより $\det\Lambda = \pm 1$ を得る．上でこれが使われた．

この量 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ は，基準系とは無関係に具体的に数の割り当てによって定義される．上のように擬テンソルとして変換すると，$\det\Lambda$ の符号に関係なく (5.20) の結果を得る．よって $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ は，擬テンソルとして理解することができる．

## 5.3　ローレンツ・スカラーとしての電荷

$da_\alpha$ の定義

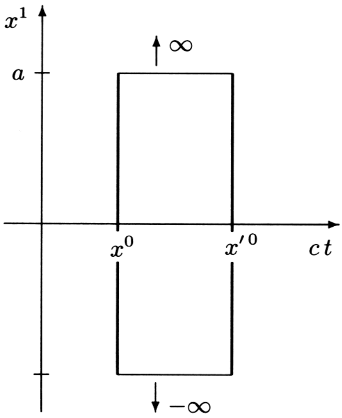
$$\left( da_\alpha \right) = \left( dx^1\, dx^2\, dx^3, dx^0\, dx^2\, dx^3, dx^0\, dx^1\, dx^3, dx^0\, dx^1\, dx^2 \right)$$

を使う．境界 $x^0 = \mathrm{const.}$ に対してこの“面積要素”は $(da_\alpha) = (\,dx^1\, dx^2\, dx^3, 0, 0, 0)$ となる．よって

$$\int_{x^0=\mathrm{const.}} da_\alpha\, j^\alpha = \int_{x^0=\mathrm{const.}} da_0\, j^0 = \int d^3r\, j^0 = c\,q$$

となる．さて，差 $q' - q$ を評価する．

$$c\,(\,q' - q\,) = \int_{x'^{\,0}\;=\mathrm{const.}} da'_\alpha\, j'^{\,\alpha} - \int_{x^0\;=\mathrm{const.}} da_\alpha\, j^\alpha = \oint da_\alpha\, j^\alpha = \int d^4x\; \partial_\alpha\, j^\alpha = 0$$




最初の積分でローレンツ・スカラー $da'_\alpha\, j'^{\,\alpha}$ は $da_\alpha\, j^\alpha$ で置き換えられた．その後両積分の違いは，積分を行う“面” $x^0 = \text{const.}$ と $x'^{\,0} = \text{const.}$, だけになる．

左方の $x$-$t$- あるいは $x^0$-$x^1$-ダイアグラムではこの（3 次元）“面” は縦の直線で示してある．それは水平線（$x^1 = \pm a$ による）によって閉曲面にすることができる．この付け加えられた境界で，$a \to \infty$ とする．しかしこの操作は積分に何らの寄与ももたらさない．というのは，電流分布は限定されているからである（それで無限遠方ではゼロでなければならない）．

今は，閉曲面の（3 次元）“面積分” はガウスの定理によってミンコフスキー空間での 4 次元積分に変更される．上の式の最後のところで，結局前提 $\partial_\alpha\, j^\alpha = 0$ が使用されている．

この結果は特に，電荷の特性の一つは速度に依存しないことである，ということを示している．実験的には，たとえばこのことは水素原子が中性であるということから証明される．

## 6.1 相対論的運動方程式

$\alpha = 1$ に対して共変形の式 $m\, du^\alpha/d\tau = (q/c)\, F^{\alpha\beta}\, u_\beta$ を評価する．左辺は

$$m\,\frac{du^1}{d\tau} = m\,\gamma\,\frac{du^1}{dt} = m\,\gamma\,\frac{d}{dt}\,\frac{v_x}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}}$$

となる．右辺は

$$\frac{q}{c}\,F^{1\beta}\,u_\beta = \frac{q}{c}\left(F^{10}\,u_0 + F^{12}\,u_2 + F^{13}\,u_3\right) = \frac{q}{c}\,\gamma\left(E_x\,c + B_z\,v_y - B_y\,v_z\right)$$

となる．両辺を等置し，係数 $\gamma$ を約分し，結果を次の形に書く．

$$\frac{d}{dt}\,\frac{m\,v_x}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{e}_x$$

$\alpha = 2$ と 3 に対応する方程式を作れば求める結果が得られる．

## 6.2 ドップラー効果

ある発信源が有限の数の山をもつ波を送信しているとする．この数は波束の長さを波長で除したものである．ローレンツ変換によっては，この離散的な数は変化しない．というのは，波の（$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} = 0$ である）どの節もローレンツ変換の際には保存される．よって位相 $k^\alpha x_\alpha$ はローレンツ・スカラーでなければならない．$x_\alpha$ はローレンツ・ベクトルであるので，このことは $k^\alpha$ に対しても成り立つ．すなわち

$$k'^{\,\alpha} = \Lambda^\alpha_\beta \; k^\beta$$

これをローレンツ変換（$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_x$）と 0-成分に対して書くと

$$k'^{\,0} = \frac{k^0 - v\;\, k^1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{あるいは} \qquad \omega_{\rm RS} = \gamma\,(\omega - v\,k^1) \tag{A.2}$$

となる．ここで静止系 $\mathrm{RS} = \mathrm{IS}'$ にある発信源が振動数 $\omega' = \omega_{\rm RS} = c\,k'^{\,0}$ で送信しており，これに対して慣性系 IS に静止している観測者は振動数 $\omega = c\,k^0$ を受信しているものとする．この振動数変化は**ドップラー効果** と呼ばれる．$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_x$ のために $v\;\,k^1 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} = v\;\,k\,\cos\phi = v\,(\omega/c)\,\cos\phi$ が成り立つ．ここで $\phi$ は，IS にいる観測者が見る波の伝搬方向 $\boldsymbol{k}$ と発信源の速度 $\boldsymbol{v}$ との間の角である．これを (A.2) に代入し $\omega$ について解くと

$$\omega = \omega_{\rm RS}\;\, \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c)\,\cos\phi} \qquad\qquad \text{（ドップラー効果）} \tag{A.3}$$

を得る．係数 $1 - (v/c)\,\cos\phi$ は運動論的効果であり，すでにガリレイ変換から得られている．これに反して $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ は，相対論的効果であり時間遅れに対応している．

$\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{k}$ に対しては，この効果は $v/c$ のオーダーである（線形ドップラー効果）．$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{k}$ に対しては，この効果は $v^2/c^2$ のオーダーである（2 次のドップラー効果）．

## 6.3 ハミルトンの原理

任意のラグランジュ関数 $\mathscr{L}(x, u)$ に対してハミルトンの原理を書き出してみる．

$$\delta \int d\tau\, \mathscr{L} = \int d\tau \left( \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\alpha}\, \delta x^\alpha + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^\alpha}\, \delta u^\alpha \right) = \int d\tau \left( \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^\alpha} \right) \delta x^\alpha = 0$$

ここで $\delta u^\alpha = (d/d\tau)\ \delta x^\alpha$ を代入し，部分積分を行った．変分 $\delta x^\alpha$ が任意であることから，オイラー－ラグランジュ方程式が出る．

$$\frac{d}{d\tau}\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\alpha} \tag{A.4}$$

ラグランジュ関数は次のように与えられている．

$$\mathscr{L}(u,x) = -m\ c\ \sqrt{u^\gamma\, u_\gamma} - \frac{q}{c}\, A^\beta\, u_\beta \tag{A.5}$$

$A_\alpha$ は外部から与えられた場である．一見，$\mathscr{L}$ は $x$ に依存していないように見えるが，実際は $A_\alpha(x)$ の引数 $x = (x^\alpha)$ を通じて具体的に場所と時間に依存している．オイラー－ラグランジュ方程式（A.4）の両辺をラグランジュ関数(A.5) に対して計算する．

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^\alpha} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{-\ m\,c\ \ u_\alpha}{\sqrt{u^\gamma u_\gamma}} - \frac{q}{c}\ A_\alpha(x)\right) = -\ m\ \frac{du_\alpha}{d\tau} - \frac{q}{c}\ \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\ u^\beta$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\alpha} = -\frac{q}{c}\ \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}\ u^\beta$$

この際，運動方程式のなかで $u^\gamma u_\gamma = c^2$ を代入してよい（しかし，ラグランジュ関数のなかではない！）．ポテンシャルの微分は $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\, A_\beta - \partial_\beta\, A_\alpha$ の形にまとめられる．以上によって運動方程式

$$m\ \frac{du_\alpha}{d\tau}\ = \frac{q}{c}\ F_{\alpha\beta}\ u^\beta \tag{A.6}$$

が得られる．

## 7.1　ローレンツ変換による圧力テンソルの導出

ローレンツ変換の行列形(3.18)に $\cosh\psi = \gamma$，$\sinh\psi = -\gamma v/c$ を代入する．このとき，静止系 IS′ から IS に変換したいので $v$ を $-v$ に置き換えてある．すると

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\, v/c \\ \gamma\, v/c & \gamma \end{pmatrix}$$

(7.16)で与えられる圧力テンソルを変換する．(3.16)の場合のように（関係している部分空間だけの）行列の形で変換を書く．すると

$$P = \Lambda^{\mathrm{T}} P'\,\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,v/c \\ \gamma\,v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,v/c \\ \gamma\,v/c & \gamma \end{pmatrix}$$
$$= P\,\gamma^2 \begin{pmatrix} v^2/c^2 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix}$$

次に共変形からはじめて $(u^\alpha) = \gamma(c, v)$ を代入すると

$$P = P\,\frac{u^\alpha u^\beta}{c^2} - P\,\eta^{\alpha\beta} = P\,\gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & v^2/c^2 \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= P\,\gamma^2 \begin{pmatrix} 1 - 1/\gamma^2 & v/c \\ v/c & v^2/c^2 + 1/\gamma^2 \end{pmatrix} = P\,\gamma^2 \begin{pmatrix} v^2/c^2 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix}$$

両方の結果は一致する．

## 9.1 加速度系における時計の時刻表示

時計の時刻は一般に $d\tau = ds_{\mathrm{clock}}/c$ で与えられる．この式を最初に慣性系 IS で，次いで基準系 KS′ で評価する．

**IS での計算**: IS では $d\tau = ds_{\mathrm{clock}}/c$ から時計の表示

$$\tau = \int_0^{t_0} dt\,\sqrt{1 - v_{\mathrm{clock}}^2/c^2}$$

が出る．IS の時計に対しては $v_{\mathrm{clock}} = 0$ が成り立つので

$$\Delta t = \int_0^{t_0} dt = t_0 = \frac{\pi}{\omega}$$

となる． KS′ の時計に対しては $v = a\,\omega\,\cos(\omega\,t)$ であるので

$$\Delta t' = \int_0^{t_0} dt\,\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}\,\cos^2(\omega\,t)} \approx \left(1 - \frac{a^2\omega^2}{4\,c^2}\right)\frac{\pi}{\omega}$$

となる．積分の評価の際には $a\,\omega \ll c$ が使われた．

**KS′ での計算**： $d\tau = ds_{\mathrm{clock}}/c$ を評価するには，まず KS′ での線素を定めなければならない． KS′ の座標を $t', x', y', z'$ で表す． IS と KS′ の間の変換は

$$t = t', \quad x = x' + a\,\sin(\omega\,t'), \quad y = y', \quad z = z'$$

である．これを使うと線素は（ $dy^2$ と $dz^2$ 項なしで）

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 = \left(1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}\cos^2(\omega\,t')\right) c^2\,dt'^{\,2} - dx'^{\,2} - 2\,a\,\omega\,\cos(\omega\,t')\,dx'\,dt' \qquad \text{(A.7)}$$

となる．KS′ に静止している KS′ の時計は $dx' = 0$ であり，そして

$$\Delta\,t' = \frac{1}{c}\int_0^{t_0} dt'\,\sqrt{g_{00}(\boldsymbol{r}_{\rm clock})} = \int_0^{t_0} dt'\,\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}\cos^2(\omega\,t')} \approx \left(1 - \frac{a^2\omega^2}{4\,c^2}\right)\frac{\pi}{\omega}$$

である． IS の時計に対しては $dx' = -\,a\omega\,\cos(\omega\,t')\,dt'$ が成り立つ（ $dx = 0$ から出る)．これを (A.7) に代入すると $ds^2 = c^2\,dt'^{\,2}$ となる．よって

$$\Delta\,t = \int_0^{t_0} dt' = t_0 = \frac{\pi}{\omega}$$

すなわち，時計の表示はどの基準系でそれが計算されたかには依存しない．

## 11.1 クリストッフェル記号

**球座標による** $\mathrm{R}^3$ ： 座標は $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$ である．線素 $ds^2 = dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\;d\phi^2\,)$ から次の計量テンソルが出る．

$$(\,g_{\mu\nu}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\ \sin^2\theta \end{pmatrix}, \qquad (\,g^{\mu\nu}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2\ \sin^2\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{(A.8)}$$

微分関数 $\partial g_{22}/\partial x^1$ と $\partial g_{33}/\partial x^1$，$\partial g_{22}/\partial x^2$ だけがゼロではない．計量テンソルは対角であるので，添字 $(2,2,1)$ あるいは $(3,3,1)$，$(3,3,2)$ をもつクリストッフェル記号だけがゼロではない．

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}\,, \qquad \Gamma^1_{22} = -\,r\,, \qquad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^1_{33} = -\,r\,\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta\,, \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\,\cos\theta \qquad \text{(A.9)}$$

**円柱座標をもつ** $\mathrm{R}^3$ ： この座標は $(x^1, x^2, x^3) = (\rho, \varphi, z)$ である． 線素 $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2 + dz^2$ から次の計量テンソルが出る．

$$(\,g_{\mu\nu}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\,g^{\mu\nu}\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

導関数 $\partial g_{22}/\partial x^1$ だけがゼロでない．計量テンソルは対角であるので，添字 $(2,2,1)$ をもつクリストッフェル記号だけがゼロでない．

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{g^{11}}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\rho\,, \qquad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{g^{22}}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{\rho} \tag{A.10}$$

**球面**: この座標は $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$ である．線素 $ds^2 = a^2\,(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\,)$ から次の計量テンソルが出る．

$$(g_{ik}) = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}, \qquad (g^{ik}) = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

唯一のゼロでない導関数は $\partial g_{22}/\partial x^1 = 2\,a^2 \sin\theta\cos\theta$ である．これを使うと添字 $(2,2,1)$ をもつクリストッフェル記号だけがゼロでない．

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{g^{11}}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\sin\theta\cos\theta\,, \qquad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{g^{22}}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \cot\theta \tag{A.12}$$

## 11.2 計量テンソルから加速度を導出

線素(9.2)から次の計量テンソルを読み取る．

$$G = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1-\omega^2\,(x^2+y^2)/c^2 & \omega\,y/c & -\omega\,x/c & 0 \\ \omega\,y/c & -1 & 0 & 0 \\ -\omega\,x/c & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

クリストッフェル記号を計算するためには次の逆行列が必要である．

$$G^{-1} = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & \omega\,y/c & -\omega\,x/c & 0 \\ \omega\,y/c & -1+\omega^2\,y^2/c^2 & -\omega^2\,x\,y/c^2 & 0 \\ -\omega\,x/c & -\omega^2\,x\,y/c^2 & -1+\omega^2\,x^2/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

この $G^{-1}$ は“ 余因子行列”を使う通常の方法で求められる．

(A.13) の $g_{\mu\nu}$ の導関数は次のものだけがゼロでない．

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x} = -\frac{2\,\omega^2}{c^2}\,x\,, \qquad \frac{\partial g_{00}}{\partial y} = -\frac{2\,\omega^2}{c^2}\,y\,, \qquad \frac{\partial g_{01}}{\partial y} = \frac{\omega}{c}\,, \qquad \frac{\partial g_{02}}{\partial x} = -\frac{\omega}{c}$$

これに $\partial g_{10}/\partial y = \partial g_{01}/\partial y$ と $\partial g_{20}/\partial x = \partial g_{02}/\partial x$ がつけ加わる．

全体として，$\mathcal{O}(v/c)$ に関して最低次のクリストッフェル記号は次のものである．

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{\omega^2 x}{c^2}, \qquad \Gamma^2_{00} = -\frac{\omega^2 y}{c^2}, \qquad \Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{10} = \frac{\omega}{c}, \qquad \Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{20} = -\frac{\omega}{c}$$

これらを使って運動方程式 $d^2x^\kappa/d\tau^2 = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\,(dx^\mu/d\tau)\,(dx^\nu/d\tau)$ を評価する．まずこの方程式の $x$- と $y$-成分を書く．

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{\omega^2 x}{c^2}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 + \frac{2\omega}{c}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dy}{d\tau}, \qquad \frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{\omega^2 y}{c^2}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - \frac{2\omega}{c}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx}{d\tau}$$

$z$-成分は $d^2z/d\tau^2 = 0$ であって特に興味の対象とはならない．第 0-成分は $d^2x^0/d\tau^2 = 0$ あるいは $d\tau = \text{const.}\cdot dt$ をもたらす．$x^0 = ct$ と $d\tau = \text{const.}\cdot dt$ を使うと運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x + 2\omega\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 y - 2\omega\frac{dx}{dt}$$

となる．右辺第 1 項はそれぞれ遠心力であり，第 2 項はコリオリの力である．

## 12.1 衛星に対する時間の遅れ

重力定数と地球の質量から作られる積 $G M_{\mathrm{E}}$ は，地球重力加速度 $g \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ と地球の半径 $R \approx 6\,370\,\mathrm{km}$ を用いて計算できる．物体の重さ $m\,g$ を重力の法則 $m\,g = G\,m\,M_{\mathrm{E}}/R^{\,2}$ を使って書き表せばこの関係は求まる．これは $GM_{\mathrm{E}} = g\,R^2$ あるいは $\Phi(r_0) = -\,g\,R^2/r_0$ を与える．運動している衛星の時計の時刻は

$$\frac{t_{\mathrm{S}}}{t_\infty} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{\Phi(r_0)}{2c^2} \quad\Longrightarrow\quad \delta = \frac{\Phi(r_0)}{2c^2}$$

である．ここで円軌道に対して $v^2 = GM_{\mathrm{E}}/r_0 = -\Phi(r_0)$ を使った．重力場の影響で，これは

$$\frac{t_{\mathrm{S}}}{t_\infty} = 1 + \frac{\Phi(r_0)}{2c^2} + \frac{\Phi(r_0)}{c^2} = 1 + \frac{3\;\Phi(r_0)}{2c^2} = 1 - \frac{3\,g\,R^2}{2\,r_0\,c^2}$$

となる．地球の実験室時間に対して

$$\frac{t_{\mathrm{L}}}{t_\infty} = 1 + \frac{\Phi(R)}{c^2} = 1 - \frac{g\,R}{c^2}$$

が成り立つ．衛星の速度が 10 倍以上も大きいので，地球の回転の速さ ($u_{\mathrm{rot}} \approx 460\,\mathrm{m/s}$) は無視される．よって実験室と衛星の相対的な時間差は

$$\frac{t_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{S}}}{t_{\mathrm{L}}} = 1 - \frac{t_{\mathrm{S}}}{t_{\mathrm{L}}} = \frac{g\,R}{c^2}\left(\frac{3\,R}{2\,r_0} - 1\right)$$

である．この効果の尺度は $g\,R/c^2 \approx 7 \times 10^{-7}$ で与えられる．地球に近い衛星に対しては $r_0 \approx R$ であり，$t_{\rm S} < t_{\rm L}$ である．このように，地球に近い衛星の時計はゆっくり進む．静止衛星に対しては $r_0 \approx 6.6\,R$ が成り立つ．よって $t_{\rm S} > t_{\rm L}$ であり，静止衛星の時計はより早く進む．衛星測位システム(GPS, global positioning system)は，この効果を考慮に入れてはじめて精度よく位置を決定できる．

## 13.1　測地線に対するオイラー－ラグランジュ方程式

ハミルトンの原理（演習 6.3 の解を見よ）から, (A.4) または(13.17)のオイラー－ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{d\tau}\,\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\kappa} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\kappa}$$

が出る．これを与えられたラグランジュ関数に対して評価する．

$$\frac{d}{d\tau}\,\frac{g_{\kappa\nu}(x)\,\dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\lambda\sigma}\,\dot{x}^\lambda\,\dot{x}^\sigma}} = \frac{1}{2}\,\frac{(\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\kappa)\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\lambda\sigma}\,\dot{x}^\lambda\,\dot{x}^\sigma}}$$

ここで $c^2 = g_{\lambda\sigma}(x)\,\dot{x}^\lambda\,\dot{x}^\sigma$ を代入する．これは $ds^2 = c^2\,d\tau^2 = g_{\lambda\sigma}(x)\,dx^\lambda\,dx^\sigma$ と $\dot{x}^\sigma = dx^\sigma/d\tau$ とから出る．左辺で $\tau$ に関する微分は $\dot{x}^\nu$ と $g_{\kappa\nu}(x)$ の引数に作用する．これらをまとめると

$$g_{\kappa\nu}\,\ddot{x}^\nu = -\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu$$

が得られる．右辺の第 1 項を 2 度書いてそれぞれに係数 1/2 をつけ，その一つの項の添字を $\mu \leftrightarrow \nu$ のように入れ替える．そして両辺に $g^{\sigma\kappa}$ を掛け，(11.17)を用いる．対称性 $g_{\kappa\nu} = g_{\nu\kappa}$ を考慮すると，これは

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} = -\frac{g^{\sigma\kappa}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau} = -\,\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad \text{(A.15)}$$

となる．ここではクリストッフェル記号の定義(11.18)が用いられている．こうしてオイラー－ラグランジュ方程式より測地線の方程式が求められた．

## 13.2　測地線

**球座標による** $\mathrm{R}^3$: 座標は $(x^1, x^2, x^3) = (r,\,\theta,\,\phi)$ である．クリストッフェル記号 (A.9) を使うと測地線の方程式 (A.15) は

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\Gamma^1_{ik}\,\frac{dx^i}{d\tau}\,\frac{dx^k}{d\tau} = r\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + r\,\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\Gamma^2_{ik}\,\frac{dx^i}{d\tau}\,\frac{dx^k}{d\tau} = -\frac{2}{r}\,\frac{dr}{d\tau}\,\frac{d\theta}{d\tau} + \sin\theta\,\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \qquad \text{(A.16)}$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\Gamma^3_{ik}\,\frac{dx^i}{d\tau}\,\frac{dx^k}{d\tau} = -\frac{2}{r}\,\frac{dr}{d\tau}\,\frac{d\phi}{d\tau} - 2\cot\theta\,\frac{d\theta}{d\tau}\,\frac{d\phi}{d\tau}$$

となる．一定値の $\theta$ と $\phi$ に対しては 2 番目と 3 番目の式は満たされ，最初の式は $d^2r/d\tau^2 = 0$ となる．これから $r = c_1\,\tau + c_2$ が出て，これはすなわち半径方向の直線である．当然ほかの直線も同様に解である．

**円柱座標による** $\mathrm{R}^3$ : 座標は $(x^1, x^2, x^3) = (\rho,\ \varphi,\ z)$ である．クリストッフェル記号（A.10）を使うと測地線の方程式（A.15）は

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\Gamma^1_{22}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -\rho\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -2\,\Gamma^2_{21}\,\frac{d\rho}{d\tau}\,\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{2}{\rho}\,\frac{d\rho}{d\tau}\,\frac{d\varphi}{d\tau}$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\Gamma^3_{ik}\,\frac{dx^i}{d\tau}\,\frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

となる．一定値の $\rho$ と $\varphi$ に対しては最初と 2 番目の式は満たされ，3 番目の式は $d^2z/d\tau^2 = 0$ となる．これから $z = c_1\,\tau + c_2$ が得られ，これはすなわち垂直線である．一定値の $z$ と $\varphi$ に対して 2 番目と 3 番目の式は満たされ，最初の式は $d^2\rho/d\tau^2 = 0$．これから $\rho = c_1\,\tau + c_2$ が出て，これはすなわち半径方向の直線である．

**球面**: クリストッフェル記号（A.12）を使うと測地線の方程式（A.15）は

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \sin\theta\,\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2, \qquad \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -2\cot\theta\,\frac{d\theta}{d\tau}\,\frac{d\phi}{d\tau}$$

となる．この方程式は測地線の方程式（A.16）で $r = a = \text{const.}$ と置いても得られる． $\theta = \pi/2$ に対して最初の方程式は満たされ，2 番目の式は $d^2\phi/d\tau^2 = 0$ となる．これから $\phi = c_1\,\tau + c_2$ となり，すなわちこれは赤道の大円である．当然ながら他のどの大円も同様に解である．

## 13.3 測地線の曲率

曲線 $y = y(x)$ を $x$-$y$ 面上に描いたとする．水平方向に接線をもつ点では，その曲率半径 $R$ は

$$\frac{1}{R} = \frac{|\, y'' \,|}{(1 + y'^2)^{3/2}} \overset{y'=0}{=} \left| y''(x) \right|$$

で与えられる．さて，題意によれば $x^3 = 0$ で放物線軌道は水平方向に接線をもっている．したがって

$$\frac{1}{R_1} = \left| \frac{d^2 x^3}{d(x^0)^2} \right| = \frac{g}{c^2} \qquad と \qquad \frac{1}{R_2} = \left| \frac{d^2 x^3}{d(x^1)^2} \right| = \frac{g}{v^2}$$

を得る．$R_2$ は目に見える放物線軌道の曲率半径であり，たとえば $v = 10\,\mathrm{m/s}$ に対して $R \approx 10\,\mathrm{m}$ である．それに対して $R_1$ は 4 次元ミンコフスキー空間における曲率半径である．これによって $1/R_1$ がリーマン空間の曲率であることがはっきり示され，その空間では軌道は測地線である．その曲率 $1/R_1$ は非常に小さい．曲率半径 $R_1 = c^2/g \approx 9 \times 10^{12}\,\mathrm{km}$ はほぼ地球半径の $10^9$ 倍である．

## 16.1 球面上の基底ベクトル

球の半径を $R$ としよう．線素

$$d\boldsymbol{r} = R\, \boldsymbol{e}_{\hat\theta}\, d\theta + R \sin\theta\, \boldsymbol{e}_{\hat\phi}\, d\phi = \boldsymbol{e}_i\, dx^i = \boldsymbol{e}^i\, dx_i$$

から次が出る．

$$\boldsymbol{e}_1 = R\, \boldsymbol{e}_{\hat\theta}\,, \quad \boldsymbol{e}^1 = \frac{\boldsymbol{e}_{\hat\theta}}{R}\,, \qquad \boldsymbol{e}_2 = R \sin\theta\, \boldsymbol{e}_{\hat\phi}\,, \quad \boldsymbol{e}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_{\hat\phi}}{R \sin\theta}$$

そして $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = g_{ik}$, $\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^k = g^{ik}$ と $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^k = g_i{}^k = \delta_i^k$ が成り立つ．計量係数は $a = R$ と置いた(A.11) で与えられる．

## 16.2 球面上の平行移動

平行移動は, (A.12) のクリストッフェル記号を使った(16.4)から計算される．すなわち

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kp}\, A^k\, dx^p \quad ; \quad \Gamma^1_{22} = -\,\sin\theta\cos\theta\,, \qquad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \cot\theta$$

あるいは

$$\delta A^1 = \sin\theta\cos\theta\, A^2\, d\phi \quad と \quad \delta A^2 = -\cot\theta\left(A^1\, d\phi + A^2\, d\theta\right) \tag{A.17}$$

単位円に対して出発点のベクトルは

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 出発点のベクトル$$

である．まず，$(\theta,\phi) = (\pi/2, 0) \to (\epsilon, 0)$ に沿って $\boldsymbol{A}$ を動かす（経路 1）．このとき $d\phi = 0$ が成り立ち，（A.17）は

$$\delta A^1 = 0 \quad そして \quad \delta A^2 = -\cot\theta\, A^2\, d\theta \qquad (経路\ 1) \tag{A.18}$$

となる．考えている経路に沿って $A^2(\theta)$ を計算するために，$\delta A^2$ を通常の微分のように取り扱ってよい．すると，2 番目の方程式の解は $A^2(\theta) = a/\sin\theta$ である．初期条件 $A^2(\pi/2) = 1$ から $a = 1$ が出る．よって $A^2(\epsilon) = 1/\sin\epsilon$ であり，すなわち

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sin\epsilon \end{pmatrix}$$

となる．経路 2 は $(\theta,\phi) = (\epsilon, 0) \to (\epsilon, \pi/2)$ と取り，この径路上では $d\theta = 0$ が成り立ち,（A.17）は

$$\delta A^1 = \sin\epsilon\, A^2\, d\phi \quad そして \quad \delta A^2 = -\frac{1}{\sin\epsilon}\, A^1\, d\phi \qquad (経路\ 2)$$

となる．ここで $\cos\epsilon$ は 1 としてある．これから $\delta^2 A^2(\phi)/d\phi^2 = -A^2$ が出て，その解は $A^2(\phi) = b\,\cos(\phi+\phi_0)$ となる．2 番目の方程式から $A^1(\phi) = (\sin\epsilon)\, b\, \sin(\phi+\phi_0)$ が出る．初期条件 $A^1(\phi = 0) = 0$ と $A^2(\phi = 0) = 1/\sin\epsilon$ が積分定数を定め，その結果

$$A^1(\phi) = \sin\phi \quad と \quad A^2(\phi) = \frac{\cos\phi}{\sin\epsilon} \qquad (経路\ 2)$$

になる．これによって経路 2 上の変化を示すことができる．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\hat\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sin\epsilon \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

経路 3 は $(\theta,\phi) = (\epsilon, \pi/2) \to (\pi/2, \pi/2)$ であり，このうえでは $d\phi = 0$ となり，（A.17）は再び（A.18）となる．これから再び $A^2(\theta) = b/\sin\theta$ が出る．初期条件 $A^2(\epsilon) = 0$ によって，しかし今度は $b = 0$ となり，こうして

$$\delta A^1 = 0 \quad そして \quad \delta A^2 = 0 \qquad (経路\ 3)$$

となる．経路 4 は $(\theta,\phi)=(\pi/2,\pi/2)\rightarrow(\pi/2,0)$ であり，このうえで $\cos\theta=0$ となり，（A.17）はこれによって

$$\delta A^1=0 \quad \text{そして} \quad \delta A^2=0 \qquad \text{（経路 4）}$$

となる．以上をまとめると

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{1}\begin{pmatrix}0\\1/\sin\epsilon\end{pmatrix}\xrightarrow{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\xrightarrow{4}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}$$

が成り立つ．この平行移動は $\epsilon\rightarrow 0$ に対して図 16.1 の右側に表示してある．ただし移動の方向は逆である．計算では $\theta=0$ の座標特異点を避けるため $\epsilon\neq 0$ が用いられた．閉じた経路に沿っての平行移動がゼロでないのは，曲がった空間の特性である．

## 17.1 共変なマクスウェル方程式

基底ベクトルの共変成分と反変成分と通常の単位ベクトルの成分の間の関係は，線素

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_{\hat{r}}\,dr+r\,\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}\,d\theta+r\,\sin\theta\,\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}\,d\phi=\boldsymbol{e}_i\,dx^i=\boldsymbol{e}^i\,dx_i$$

からもたらされる．ここで

$$\left(dx^i\right)=\left(dr,d\theta,d\phi\right) \quad \text{そして} \quad \left(dx_i\right)=\left(dr,\,r^2\,d\theta\,,\,r^2\sin^2\theta\,d\phi\right)$$

である．$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$ は基底ベクトルに依らないスカラーであることを使うと，電場ベクトルに対して

$$E^1=E_1=E_r\,,\quad E^2=\frac{E_\theta}{r}\,,\quad E_2=r\,E_\theta\,,\quad E^3=\frac{E_\phi}{r\,\sin\theta}\,,\quad E_3=r\,\sin\theta\,E_\phi$$

が成り立つ．クリストッフェル記号（A.9）から

$$\Gamma^i_{i1}=\frac{2}{r}\,,\qquad \Gamma^i_{i2}=\cot\theta\,,\qquad \Gamma^i_{i3}=0$$

を得る．共変導関数を求めると

$$E^i{}_{||i}=E^i{}_{|i}+\Gamma^i_{ip}\,E^p=\frac{\partial E^1}{\partial r}+\frac{\partial E^2}{\partial\theta}+\frac{\partial E^3}{\partial\phi}+\Gamma^i_{i\ 1}\,E^1+\Gamma^i_{i\ 2}\,E^2$$

$$=\frac{\partial E_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}+\frac{2}{r}\,E_r+\frac{\cot\theta}{r}\,E_\theta$$

となる．これはよく知られた球座標の div $\boldsymbol{E}$ に対する表示と一致する．もう一つの非同次方程式の共変形を示す．第 1 成分だけを書き出すことにする．すると右辺に $j_r$ と $\partial_t E_r$ がくる．(17.18) を参照し，かつ $g = r^4 \sin^2\theta$ を使うと，左辺は

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\epsilon^{1kl}\,B_{l|k} = \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\left(\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3}\right) = \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\left(\frac{\partial\,(r\,\sin\theta\,B_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial\,(r\,B_\theta)}{\partial\phi}\right)$$

となる．因子 $r$ は約分される．よってよく知られた rot $\boldsymbol{B}$ の $r$-成分が得られる．

## 18.1 曲率テンソルの変形

(18.30) の右辺にクリストッフェル記号の定義を代入し，そして $g_{ks}\,g^{kr} = \delta^r_s$ を考慮すると

$$\begin{aligned} g_{ks}\Gamma^k_{pm} + g_{km}\Gamma^k_{ps} &= g_{ks}\,\frac{g^{kr}}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^r}\right) \\ &\quad + g_{km}\,\frac{g^{kr}}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{ps}}{\partial x^r}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{sm}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{ps}}{\partial x^m}\right) \end{aligned}$$

を得る．最後の表式で第 1 項と第 6 項，そして第 3 項と第 4 項とが打ち消し合う．残った導関数は等しく，期待された結果を与える．

(18.31) の関係は $g_{ms}\,g^{sr} = \delta^r_m$ を $x^p$ で微分すればただちに出てくる．すなわち

$$g_{ms}\,\frac{\partial g^{sr}}{\partial x^p} = -\,g^{sr}\,\frac{\partial g_{ms}}{\partial x^p} = -g^{sr}\left(g_{qs}\,\Gamma^q_{pm} + g_{qm}\,\Gamma^q_{ps}\right) \qquad \text{(A.19)}$$

を得る．

さてここで，$R_{mikp} = g_{ms}\,R^s{}_{ikp}$ を (18.8) の $R^s{}_{ikp}$ を使って書く．その際，最初の 2 項にクリストッフェル記号を書き写す．

$$\begin{aligned} R_{mikp} &= g_{ms}\,\frac{\partial}{\partial x^p}\,\frac{g^{sr}}{2}\left(\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}\right) \\ &\quad - g_{ms}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,\frac{g^{sr}}{2}\left(\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^r}\right) \\ &\quad + g_{ms}\left(\Gamma^r_{ik}\,\Gamma^s_{rp} - \Gamma^r_{ip}\,\Gamma^s_{rk}\right) \end{aligned}$$

大きな括弧の前の微分 $\partial_p$ と $\partial_k$ はまず括弧に作用して 6 個の計量テンソルの 2 階微分導関数を作り，そのうちの二つが打ち消し合う．さらに微分演算子はすぐ後ろにあ

る計量テンソルに作用する．この部分に対しては (A.19) を使い，括弧の中身もまたクリストッフェル記号を使ってまとめると次を得る．

$$R_{mikp} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^i\,\partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^m\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^m\,\partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^i\,\partial x^k}\right)$$
$$- \left(g_{rs}\,\Gamma^r_{pm} + g_{rm}\,\Gamma^r_{ps}\right)\Gamma^s_{ik} + \left(g_{rs}\,\Gamma^r_{km} + g_{rm}\,\Gamma^r_{ks}\right)\Gamma^s_{pi}$$
$$+ g_{mr}\left(\Gamma^s_{ik}\,\Gamma^r_{sp} - \Gamma^s_{ip}\,\Gamma^r_{sk}\right)$$

それぞれのクリストッフェル記号の下添字の交換対称性に注意を払いながら以下の考察を行う．最初の行は(18.11)の最初の行と同じである．2 行目から(18.11)の 2 行目とおつりの項が出る．このおつりの項と 3 行目の項とは互い打ち消し合うことがすぐにわかるであろう．以上によって期待された結果(18.11)が導出される．

## 18.2 ガウスの曲率

距離は $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ で定められ，$dz = x\,dx/\rho_1 + y\,dy/\rho_2$ を代入すると

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}\right)dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\rho_2^2}\right)dy^2 + \frac{2\,x\,y}{\rho_1\,\rho_2}\,dx\,dy$$

となる．これから計量テンソルが得られる．

$$\left(g_{ik}\right) = \begin{pmatrix} 1 + x^2/\rho_1^2 & x\,y/(\rho_1\,\rho_2) \\ x\,y/(\rho_1\,\rho_2) & 1 + y^2/\rho_2^2 \end{pmatrix} \overset{(x,y)=(0,0)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これによって $g(0,0) = 1$ と $g^{ik}(0,0) = \delta^{ik}$ が成り立つ．ゼロでない導関数は

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x} = \frac{2\,x}{\rho_1^2}\,, \qquad \frac{\partial g_{22}}{\partial y} = \frac{2\,y}{\rho_2^2}\,, \qquad \frac{\partial g_{12}}{\partial x} = \frac{y}{\rho_1\,\rho_2}\,, \qquad \frac{\partial g_{12}}{\partial y} = \frac{x}{\rho_1\,\rho_2}$$

である． $(x,y) = (0,0)$ ではすべての微分導関数がゼロとなり，よってまたすべてのクリストッフェル記号がゼロとなる．

$$(x,y) = (0,0) \quad \text{に対して} \quad \Gamma^i_{kl} = 0$$

よって $R_{1212}$ には計量係数の 2 階微分だけが寄与する．

$$R_{1212} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x\,\partial y}\right) = -\,\frac{1}{\rho_1\,\rho_2}$$

$g = 1$ と置いた(18.23)からスカラー曲率

$$R = \frac{2\,R_{1212}}{g} = -\,\frac{1}{\rho_1\,\rho_2} = -\,2\,K$$

が出る．これが求める $R$ と $K$ との関係である．

## 20.1 運動の定数

運動方程式

$$\frac{du_\mu}{d\tau} = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\,u_\nu\,u^\lambda \quad と \quad \frac{du^\mu}{d\tau} = -\,\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,u^\nu\,u^\lambda$$

で符号が異なっていることは決定的に重要である．これは，たとえば(15.13)と(15.11)の比較から出る．対応してこのことは $ds_\mu/d\tau$ と $ds^\mu/d\tau$ に対して成り立つ．上の式を使って計算すると

$$\frac{d}{d\tau}\,\left(u^\mu\,u_\mu\right) = u^\mu\,\frac{du_\mu}{d\tau} + u_\mu\,\frac{du^\mu}{d\tau} = u^\mu\,\Gamma^\nu_{\mu\lambda}\,u_\nu\,u^\lambda - u_\mu\,\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,u^\nu\,u^\lambda \;=\; 0$$

を得る．適当に和の添字を変更すれば二つの項が等しくなり，打ち消し合うことがわかる．次のようにして，同じことがスピンに対しても成り立つ．

$$\frac{d}{d\tau}\,\left(s^\mu\,s_\mu\right) = s^\mu\,\Gamma^\nu_{\mu\lambda}\,s_\nu\,u^\lambda - s_\mu\,\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,s^\nu\,u^\lambda \;=\; 0$$

**別解**: 運動方程式は共変微分を使って $Du^\mu/d\tau = 0$ と $Ds^\mu/d\tau = 0$ のように書ける．さて，あるスカラー量の共変導関数は通常の導関数に等しい．したがって

$$\frac{d}{d\tau}\,\left(u^\mu\,u_\mu\right) = \frac{D}{d\tau}\,\left(u^\mu\,u_\mu\right) = u^\mu\,\frac{Du_\mu}{d\tau} + u_\mu\,\frac{Du^\mu}{d\tau} = 0$$

よって， $DA^\mu = 0$ であるすべてのベクトル $A^\mu$ に対して $A^\mu\,A_\mu = \mathrm{const.}$ が成り立つ．

## 20.2 トーマス歳差

解くべき運動方程式(20.18)は

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} \;=\; -\,\frac{1}{c^2}\,\frac{du_\beta}{d\tau}\;s^\beta\,u^\alpha \tag{A.20}$$

である．与えられた軌道 $x^\alpha(t)$ と $d\tau = \gamma^{-1}\,dt$ とから次が出る．

$$\left( u^\alpha \right) = \left( \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) = \gamma \left( c,\ -R\omega\,\sin(\omega\,t),\ R\omega\,\cos(\omega\,t),\ 0 \right)$$

$$\left( \frac{du^\alpha}{d\tau} \right) = -\gamma^2\,\omega^2\,R \left( 0,\ \cos(\omega\,t),\ \sin(\omega\,t),\ 0 \right)$$

$$\left( \frac{d^2u^\alpha}{d\tau^2} \right) = \gamma^3\,\omega^3\,R \left( 0,\ \sin(\omega\,t),\ -\cos(\omega\,t),\ 0 \right)$$

$$\left( \frac{d^3u^\alpha}{d\tau^3} \right) = \gamma^4\,\omega^4\,R \left( 0,\ \cos(\omega\,t),\ \sin(\omega\,t),\ 0 \right) = -\gamma^2\,\omega^2 \left( \frac{du^\alpha}{d\tau} \right)$$

さて，運動方程式の第 0-成分を考えると次の式を得る．

$$\frac{ds^0}{d\tau} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{du^\beta}{d\tau}\,s_\beta\,u^0 = -\frac{\gamma}{c}\,\frac{du^\beta}{d\tau}\,s_\beta \tag{A.21}$$

$$\frac{d^2s^0}{d\tau^2} = -\frac{\gamma}{c}\,\frac{d^2u^\beta}{d\tau^2}\,s_\beta - \frac{\gamma}{c}\,\frac{du^\beta}{d\tau}\,\frac{ds_\beta}{d\tau} = -\frac{\gamma}{c}\,\frac{d^2u^\beta}{d\tau^2}\,s_\beta \tag{A.22}$$

ここで(20.16)によって $ds_\beta/d\tau$ は $u_\beta$ に比例する．慣性系を考えているので $u_\beta\,(du^\beta/d\tau) = 0$ となる．このために 2 番目の方程式で項が一つ消える．さらに高階の微分を取ると

$$\frac{d^3s^0}{d\tau^3} = -\frac{\gamma}{c} \left( \frac{d^3u^\beta}{d\tau^3} - \frac{1}{c^2}\,\frac{d^2u^\alpha}{d\tau^2}\,u_\alpha\,\frac{du^\beta}{d\tau} \right) s_\beta$$

$$= -\frac{\gamma}{c} \left( -\gamma^2\,\omega^2 - \frac{\gamma^4}{c^2}\,\omega^4\,R^2 \right) \frac{du^\beta}{d\tau}\,s_\beta = \frac{\gamma^5\,\omega^2}{c}\,\frac{du^\beta}{d\tau}\,s_\beta = -\gamma^4\,\omega^2\,\frac{ds^0}{d\tau}$$

となる．最右辺の一つ前の式で(A.20) が使われている．$d\tau = \gamma^{-1}\,dt$ を使うと上の結果は

$$\frac{d^3s^0}{dt^3} = -\gamma^2\,\omega^2\,\frac{ds^0}{dt} \qquad \text{そして} \qquad s^0(t) = A\,\sin(\gamma\,\omega\,t)$$

となる．初期条件として $s^0(0) = 0$ が使われた．解 $s^0(t)$ とわかっている $u^\alpha(\tau)$ とを(A.21) と(A.22) に代入する．すると

$$\gamma^2\omega\ A\,\cos(\gamma\,\omega\,t) = -\frac{\gamma^3\,\omega^2\,R}{c} \left( s^1\cos(\omega\,t) + s^2\sin(\omega\,t) \right)$$

$$-\gamma^4\omega^2\,A\,\sin(\gamma\,\omega\,t) = \frac{\gamma^4\,\omega^3\,R}{c} \left( s^1\sin(\omega\,t) - s^2\cos(\omega\,t) \right)$$

これから

$$s^1\cos(\omega\, t) + s^2\sin(\omega\, t) = -\frac{A}{\gamma\, v/c}\;\cos(\gamma\;\omega\, t) \approx -\frac{A}{v/c}\;\cos(\gamma\;\omega\, t)$$

$$s^1\sin(\omega\, t) - s^2\cos(\omega\, t) = -\frac{A}{v/c}\;\sin(\gamma\;\omega\, t)$$

を得る．振幅で相対論的な量 $v^2/c^2$ は無視されている．上の二つの方程式を $s^1(t)$ と $s^2(t)$ について解き， $\sigma = -A\,c/v$ と $\omega_{\mathrm{Th}} = \omega\,(\gamma-1)$ をもつ(20.32)を得る．第 3-成分に対しては (A.20) から $ds^3/d\tau = 0$ または $s^3 = \mathrm{const.}$ を得る．そして初期条件 $\boldsymbol{s} = \sigma\,\boldsymbol{e}_x$ に対する全体的な結果は

$$\left(s^\alpha(t)\right) = \Big(-\sigma\,(v/c)\,\sin(\gamma\;\omega\, t),\, \sigma\,\cos\left[(\gamma-1)\,\omega\, t\right],\, -\sigma\,\sin\left[(\gamma-1)\,\omega\, t\right],0\Big)$$

となる．何らトルクが働かないにもかかわらず，スピンは円軌道上で一周$(\omega\, t = 2\,\pi)$の後，その初期の方向には戻らない．それは $(\gamma-1)\,2\,\pi \approx \pi\, v^2/c^2$ だけずれている．このトーマス歳差は，原子ではスピン-軌道項を取り扱う際に考慮されなければならない．

## 21.1　場の方程式の変更

次の方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\,g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\,\pi\,G}{c^{\,4}}\,T_{\mu\nu} \qquad \text{(A.23)}$$

に $g^{\mu\nu}$ を掛ける．そして $\mu$ と $\nu$ とに関して和を取る．$g^{\mu\nu}\,g_{\mu\nu} = 4$ と $g^{\mu\nu}\,R_{\mu\nu} = R$，$g^{\mu\nu}\,T_{\mu\nu} = T$ とを使うと

$$R - 2\,R + 4\,\Lambda = -\frac{8\,\pi\,G}{c^{\,4}}\,T$$

または $R = 4\,\Lambda + 8\,\pi\,G\,T/c^4$ を得る．この $R$ を (A.23) に代入すると

$$R_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\,\pi\,G}{c^{\,4}}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\,g_{\mu\nu}\right)$$

を得る．項 $\Lambda\, g_{\mu\nu}$ の符号の逆転に注意する．

## 22.1　弱い場に対するゲージ条件

$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - T\,\eta_{\mu\nu}/2$ に $\eta^{\mu\nu}$ を掛けると $S = -T$ と

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - \frac{S}{2}\,\eta_{\mu\nu}$$

とを得る．これによって（弱い場に対する）エネルギー運動量保存則 $T_{\mu\nu}{}^{|\mu}=0$ は

$$2\,S^{\mu}{}_{\nu|\mu}-S^{\mu}{}_{\mu|\nu}=0 \tag{A.24}$$

となる．ゲージ条件は同じ形，$2\,h^{\mu}{}_{\nu|\mu}-h^{\mu}{}_{\mu|\nu}=0$ である．この条件を遅延解

$$h_{\mu\nu}(\boldsymbol{r},\,t)=-\frac{4\,G}{c^{\,4}}\int d^3r'\;\frac{S_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}',\,t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{A.25}$$

に対して当てはめてみる．この積分で，$h_{..}$ の微分はすべて $S_{..}$ の微分に転嫁できる．時間の微分に対してこれはすぐにできる．$\boldsymbol{r}$ に関する微分に対してこの転嫁は 2 段階を経る．まず $\boldsymbol{r}$-依存性は $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ の形になっているので，$\boldsymbol{r}$ の代わりに $\boldsymbol{r}'$ で微分してよい．次いでこの微分は部分積分によって $S_{\mu\nu}$ の場所の引数に転嫁される．この 2 段階のどちらも負号をともなう．よって $2\,h_{\mu\nu}{}^{|\nu}-h_{\mu}{}^{\mu|\nu}$ は被積分関数に $2\,S^{\mu}{}_{\nu|\mu}-S^{\mu}{}_{\mu|\nu}$ をもつ積分を生じさせる．この表式はゼロになるので，ゲージ条件は満たされる．

## 22.2　回転している球の重力場

静的な場合は (A.25) の時間の引数はない．したがって，解くべき式は $v/c$ あるいは $\omega\,R/c$ の最低次で

$$h_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})=-\frac{4\,G}{c^{\,4}}\int d^3r'\;\frac{S_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

となる．ここで $S_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}-T\,\eta_{\mu\nu}/2$ である．エネルギー運動量テンソル(20.29)に $P\approx 0$ と $(u_\mu)\approx(c,v_i)$ と一様密度を代入する．すると $r>R$ に対して $S_{\mu\nu}=0$ であり，また

$$\big(S_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})\big)\;=\;\varrho\,c^2\begin{pmatrix}1/2 & v_1/c & v_2/c & v_3/c\\ v_1/c & 1/2 & 0 & 0\\ v_2/c & 0 & 1/2 & 0\\ v_3/c & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\qquad (r\le R)$$

となる．これから対角要素が

$$h_{\mu\mu}(\boldsymbol{r})=-\frac{2\,G}{c^{\,2}}\int_{r'\le R}d^3r'\;\frac{\varrho}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\,\frac{2\,GM}{c^2\,r}\qquad (r>R)$$

となる．ここで $M=4\,\pi\,\varrho\,R^3/3$ である．回転による速度場は $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ あるいは $v_i=\epsilon_{ikn}\,\omega^k\,x^n$ である．よって

$$h_{0\,i}(\boldsymbol{r})=-\frac{4\,G}{c^3}\,\epsilon_{ikn}\,\omega^k\int_{r'\le R}d^3r'\;\frac{\varrho\;\,x'^{\,n}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\,\frac{4\,GMR^{\,2}}{5\,c^3}\,\frac{\epsilon_{ikn}\,\omega^k\,x^n}{r^3}\qquad (r>R)$$

を得る．関連している線素は(30.14)に与えられている． 30 節には計算の更なる詳細と結果の議論がある．詳細な検討には特に符号が重要である．たとえばミンコフスキー空間では，$v^1 = v_x = -v_1$ と $\epsilon^{123} = 1$ であるが $\epsilon_{123} = -1$ である．(17.15)を見よ．

## 23.1 簡単なので省略する．

## 25.1 シュワルツシルト計量での衛星の時計

中心場のなかでの衛星の自由落下に対して(25.24)と(25.25)が成り立ち，そのとき $\varepsilon = c^2$ で $\lambda = \tau$ （質量粒子），$\dot{r} = 0$ （円軌道）である．こうして

$$c\,\frac{dt}{d\tau}\left(1-\frac{2\,a}{r}\right) = F\,, \qquad -\frac{a\,\varepsilon}{r} + \frac{\ell^{\,2}}{2\,r^2} - \frac{a\,\ell^{\,2}}{r^3} = \frac{F^{\,2}-c^2}{2} \tag{A.26}$$

となる．2 番目の方程式から $F^2 = (c^2 + \ell^2/r^2)(1-2\,a/r)$ を得て，この $F$ を最初の方程式に代入すると

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{1-2\,a/r}{1+\ell^2/(c^2\,r^2)}} \tag{A.27}$$

を得る．いま半径 $r$ で角運動量 $l$ を表すことにする．円軌道は実効ポテンシャル(25.27)の最小点で生じる．すなわち

$$V_{\rm eff}(r) = -\frac{a\,c^2}{r} + \frac{\ell^{\,2}}{2\,r^2}\left(1-\frac{2\,a}{r}\right), \qquad \frac{dV_{\rm eff}}{dr} = \frac{a\,c^2}{r^2} - \frac{\ell^{\,2}}{r^3}\left(1-\frac{3\,a}{r}\right) = 0$$

これから

$$\frac{\ell^2}{c^2\,r^2} = \frac{a/r}{1-3\,a/r}$$

が出る．これを (A.27) に代入すると

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1-\frac{3\,a}{r}} \approx 1-\frac{3\,a}{2\;\,r} \tag{A.28}$$

となる．演習 12.1 でわれわれは $d\tau \approx \left(\,1 - v^2/(2\,c^2) + \Phi(r)/c^2\,\right) dt$ からよく似た結果を得ている．

## 25.2 ブラックホールによる捕獲

ブラックホールの重力場はシュワルツシルト計量で記述できる．運動方程式(25.26)から始める．

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{\rm eff}(r) = {\rm const.} = \frac{c^2}{4}$$

定数の値は $V_{\text{eff}}(\infty)=0$ と $\dot{r}_\infty=v_\infty=c/\sqrt{2}$ から出る．実効ポテンシャル（図 25.1）の最大値が $c^2/4$ より小さいとき宇宙船は中心に落ち込み，その他の場合は双曲型の軌道を生じてブラックホールから離れ去る．(25.27) に角運動量

$$\ell = v_\infty\, b = 4\sqrt{2}\, a\, c$$

を代入すると

$$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{c^2} = -\frac{a}{r} + \frac{16\,a^2}{r^2}\left(1-\frac{2\,a}{r}\right), \quad \frac{1}{c^2}\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{a}{r^2}\left[1-\frac{32\,a}{r}\left(1-\frac{3\,a}{r}\right)\right]=0$$

を得る．2 番目の式から $r=\left(16\pm 4\sqrt{10}\right)a$ が出る．これによって最大値に対して

$$V_{\text{eff}}^{\max} = V_{\text{eff}}\big((16-4\sqrt{10}\,)\,a\big) \approx V_{\text{eff}}(3.25\,a) \approx 0.276\,c^2$$

が成り立つ． $\dot{r}^2/2+V_{\text{eff}}(r)=c^2/4$ のなかで“エネルギー”$0.25\,c^2$ だけが自由に使えるので，この最大値 $0.276\,c^2$ が中心への落下を防いでいるという言い方ができる．

## 25.3　シュワルツシルト計量での中心落下

中心場中の質量粒子の中心落下に対しては $2\,a=r_{\text{S}}$ と

$$\varepsilon = c^2\,, \qquad \lambda=\tau\,, \qquad \ell=0$$

を使った (25.24) と (25.25) が成り立つ．われわれは運動方程式

$$\frac{dt}{d\tau}\left(1-\frac{r_{\text{S}}}{r}\right)=\frac{F}{c} \qquad \text{と} \qquad \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r_{\text{S}}}{r} = \frac{F^{\,2}}{c^2}-1$$

を使う．2 番目の式に初期条件を入れると $F^2/c^2=2/3$ を得る．よって二つの式は

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{2/3}}{1-r_{\text{S}}/r}\,, \qquad \frac{dr}{d\tau} = \pm\frac{c}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3\ r_{\text{S}}}{r}-1} \tag{A.29}$$

となる．初期条件に従って 2 番目の式で負符号を採用する．解 $r(\tau)$ は $r(0)=3\,r_{\text{S}}$ に水平な接線で始まり，そして小さくなり，時間 $\tau_0$ で中心で終わる．この解は図 48.1 に描いてある．$y=3\ r_{\text{S}}/r$ と置き換えて時間 $\tau_0$ を計算すると

$$\tau_0 = \int_{3\,r_{\text{S}}}^0 dr\,\frac{d\tau}{dr} = \frac{-\sqrt{3}}{c}\int_{3\,r_{\text{S}}}^0 \frac{dr}{\sqrt{3\ r_{\text{S}}/r-1}} = \frac{-3\sqrt{3}\ r_{\text{S}}}{c}\int_\infty^1 \frac{dy}{y^2\sqrt{y-1}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}\ \pi}{2}\,\frac{r_{\text{S}}}{c} \approx 8.16\,\frac{r_{\text{S}}}{c}$$

を得る．自由落下している観測者は，$r_S/c$ 位の時間の間に中心への激突を経験することになる．これに反して時間座標 $t$ をもつ遠方にいる観測者に対しては，軌道 $r(t)$ は特別なものではない．すなわち（A.29）から

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt} = -\,\frac{c}{\sqrt{2}}\,\left(1-\frac{r_S}{r}\right)\sqrt{\frac{3\ r_S}{r}-1} \overset{r\to r_s}{\approx} -\frac{c}{r_S}\,(r-r_S)$$

を得る．これによって遠方の観測者は，自由落下物体がシュワルツシルト半径へ漸近的に接近するのを見ることになる．

$$r(t) \approx r_S + b\,\exp\left(-\frac{c\ t}{r_S}\right) \qquad (m \neq 0)$$

これまでの考察は質量粒子に対して成り立つ．光子に対しては(25.25)に $\varepsilon = 0$ と $\ell = 0$ を代入する．すると

$$\frac{dt}{d\lambda}\left(1-\frac{r_S}{r}\right) = \frac{F}{c} \qquad \text{そして} \qquad \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = F^{\,2}$$

これから

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\lambda}\,\frac{d\lambda}{dt} = -\,c\left(1-\frac{r_S}{r}\right) \overset{r\to r_s}{\approx} -\frac{c}{r_S}\,(r-r_S)$$

と

$$r(t) \approx r_S + b\,\exp\left(-\frac{c\ t}{r_S}\right) \qquad (m = 0)$$

とを得る．光子もまた外から見ていると漸近的にシュワルツシルト半径に接近する．

## 30.1　水星の重力磁気力

太陽の場に対しては $\Phi \approx -GM_\odot/r$ である．$\boldsymbol{\Omega}$-場に対しては(30.22)から始め，その際 $\mathcal{O}(1)$ の係数を無視する．すると

$$\left|\,\mathrm{grad}\,\Phi\,\right| \approx \frac{GM_\odot}{r^2} \qquad \text{と} \qquad \left|\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}\,\right| \approx \frac{GM_\odot\,R_\odot^2}{c^2}\,\frac{\omega_\odot}{r^3}\,\omega\,r$$

を得る．この際，水星の速さとして $\omega\,r$ を取った．求めている比は

$$\frac{|\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}\,|}{|\,\mathrm{grad}\,\Phi\,|} \approx \frac{\omega_\odot\,\omega\,R_\odot^2}{c^2} \approx 10^{-11}$$

である．この効果の大きさは，オーダー $v^2/c^2 = \omega^2\,r^2/c^2$ を使って比較することもできる．これまでこれを軌道運動への相対論的補正と考えてきた．その比は

$$\frac{|\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}\,|}{|\,\mathrm{grad}\,\Phi\,|} \approx \frac{\omega^2\,r^2}{c^2}\,\frac{\omega_\odot}{\omega}\,\frac{R_\odot^2}{r^2} \approx 6\times 10^{-4}\,\frac{\omega^2\,r^2}{c^2}$$

とも書ける．(27.33)は $v^2/c^2$ のオーダーであるが，それに対する補正は千分の一よりも小さいであろう．

## 33.1 波の場の偏光

(33.12)の上の行を考える．$\cos(\omega t) = 0$ に対しては一群の自由粒子の位置を示す $\rho$ は円を表し，$\cos(\omega t) = \pm 1$ に対しては楕円（完全な偏光）を表す．一般性を失うことなしに $\cos(\omega t) = -1$ を選ぶことができる．離心率は半径 $L$ に依存しないので $L = 1$ と置いてよい．すなわち

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = 1 + 2h\cos(2\varphi) = 1 + 2h\cos^2\varphi - 2h\sin^2\varphi = 1 + 2h\,x^2 - 2h\,y^2$$

$\mathcal{O}(h^2)$ のオーダーの項を無視すると，これは

$$\frac{x^2}{1+2h} + \frac{y^2}{1-2h} = 1$$

となり，このようにして半長軸 $a = 1 + h$ と半短軸 $b = 1 - h$ をもつ楕円になる．これから離心率は次のようになる．

$$\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2} = 2\sqrt{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

## 36.1 放射による連星の軌道の変動

(36.24)から円軌道に対して

$$\Omega^2 = \frac{2GM}{r^3} \qquad \text{と} \qquad \frac{v^2}{c^2} = \frac{\Omega^2 r^2}{c^2} = \frac{r_S}{r}$$

が出る．放射パワー(36.25)とそのエネルギー $E$ は

$$P = \frac{64}{5}\,\frac{G^4 M^5}{c^5}\,\frac{1}{r^5}, \qquad E = -\frac{1}{2}\,\frac{GM^2}{r}$$

である．エネルギーはポテンシャル・エネルギーの半分に等しい．周期当たり放射されるエネルギーは $P$ に軌道周期 $T = 2\pi/\Omega$ を掛けたものである．よって次を得る．

$$\frac{\Delta E}{|E|} = \frac{2\pi}{\Omega}\,\frac{P}{|E|} = \frac{32\pi}{5}\left(\frac{r_S}{r}\right)^{5/2} = \frac{32\pi}{5}\left(\frac{v}{c}\right)^5$$

## 36.2 PSR 1913 + 16 の軌道速度

簡単な見積もりのために（直径 $r$ の）円軌道から始める． $M_1 = M_2 = M$ と置いて(36.24)から次を得る．

$$r^3 = \frac{2\,GM}{\Omega^2} = \frac{r_\mathrm{S}\,c^2}{\Omega^2}$$

星の速度は半径 $r/2$ と角速度の積であり，したがって

$$\frac{v}{c} = \frac{r\,\Omega}{2\,c} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_\mathrm{S}\,\Omega}{c}\right)^{1/3} \approx 10^{-3}$$

よって，これは 4 重極放射の公式に対する前提 $v \ll c$ を満たす．

## 36.3 地球の重力波放射

(36.24)から $\Omega^2 = G\,M_\odot/r^3$ が出る．ここで $M_\mathrm{E} \ll M_\odot$ が使われた．よって放射パワー(36.25)は

$$P = \frac{32\,G^4}{5\,c^5}\,\frac{M_\mathrm{E}^2\,M_\odot^3}{r^5} = \frac{32\,G}{5\,c^5}\,\Omega^6\,r^4\,M_\mathrm{E}^2 \approx 200\,\mathrm{Watt}$$

となる．地球軌道の非常に厳密な計算の際でさえもこの放射は無視できるほどの役割しか果たさない．

## 36.4 連星の重力波の振幅

エネルギー流束密度 $\Phi_\mathrm{GW}$ と放射パワー $P$ は

$$\Phi_\mathrm{GW} \overset{(34.6)}{=} \frac{c^{\,3}}{8\,\pi\,G}\,\omega^2\,h^2 \qquad \text{と} \qquad P \overset{(36.25)}{=} \frac{64\,G^4}{5\,c^5}\,\frac{M^5}{r^5}$$

である．振動数 $\omega$ は $\omega = 2\,\Omega$ と置いた(36.24)から出る．パワー $P$ をもつ等方な放射から始める．これは軌道面からの可能なすべての方向に関する平均に対応する．すると次が成り立つ．

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_\mathrm{GW} = P/\big(4\,\pi\,D^2\big)\\ &\omega^2 = 8\;\,GM/r^3\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \frac{c^{\,3}}{8\,\pi\,G}\,\frac{8\;\,GM}{r^3}\,h^2 = \frac{64\,G^4}{5\,c^5}\,\frac{M^5}{r^5}\,\frac{1}{4\,\pi\,D^2}$$

$h$ について解けば次を得る．

$$h = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{r_\mathrm{S}^2}{D\,r} \tag{A.30}$$

## 37.1 重力波による地球–月の距離の変動

(37.3)によって i Boo からの重力波は $h \approx 10^{-20}$ である．これは(34.6)を使った(36.37)から出る．これから地球と月の間の距離 $L \approx 3 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$ の変動は次のようになる．

$$\Delta L = L\,h \approx 3 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

このような距離の変動は，原理的に月に置かれている鏡を使うレーザー干渉実験で検証できる（37 節）．軌道周期 $T = 0.268\,\mathrm{d}$ を使って(36.35)から重力波の波長を次のように得る．

$$\lambda = c\,T \approx 7 \times 10^{12}\,\mathrm{m}$$

よって $L \ll \lambda$ となる．$L \ll \lambda$ である検出器は，電波の波長よりはるかに大きい電波アンテナと同じように，ほとんど意味がないだろう．

## 37.2 重力波検出器の断面積

(37.17)の振幅 $\xi(t)$ と(37.15)の力 $K_{\rm GW}$ を使って時間平均されたパワー

$$P_{\rm absorb}(h,\omega) = 4\left\langle K_{\rm GW}\,\dot{\xi}\right\rangle = \frac{4}{T}\int_0^T dt\,K_{\rm GW}\,\dot{\xi} = \frac{2\,m\,L^2\,h^2\,\gamma\,\omega^6}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\,\omega^2}$$

を得る．係数 4 は図 37.1 の配置にある四つの質量を表している． $M = 4\,m$ とエネルギー流束密度(34.6)を使ってこれから

$$\sigma(\omega) = \frac{P_{\rm absorb}}{\Phi_{\rm GW}} = \frac{4\,\pi\,G}{c^3}\,\frac{M\,L^2\,\gamma\,\omega^4}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\,\omega^2}$$

を得る．断面積はその面に入射するエネルギー流束密度 $\Phi_{\rm GW}$ が吸収される実効的な面積である．共鳴によって最大の断面積

$$\sigma(\omega_0) = \frac{4\,\pi\,G}{c^3}\,\frac{M\,L^2\,\omega_0^2}{\gamma} = \pi\,\sigma_{\rm geom}\,\frac{r_{\rm S}}{\lambda_0}\,\frac{\omega_0}{\gamma}$$

を得る．このとき $\omega_0 = 2\,\pi\,c/\lambda_0$ を使った．図の配置は直径が $2\,L$ であり，よって幾何学的な断面積は $\sigma_{\rm geom} \approx 4\,\pi L^2$ である．

検出用質量 $M = 4\,m$ は，関係しているシュワルツシルト半径 $r_{\rm S} = 2GM/c^2$ で書き表されている． $r_{\rm S} \ll \lambda_0$ であるので， $\sigma(\omega_0) \ll \sigma_{\rm geom}$ である．共鳴因子 $\omega_0/\gamma$ は実際 1 に比べて大きくなりうる（たとえば $10^6$ ）．しかし，どんな場合でも $\sigma(\omega_0) \ll \sigma_{\rm geom}$ は変わらない．

## 38.1 地球中心の圧力

(38.11)から次が成り立つ.

$$P = P_0 - \frac{2\,\pi}{3}\,G\,\varrho_0^2\,r^2 = P_0\left(1 - \frac{r^2}{R_{\rm E}^2}\right) \tag{A.31}$$

地表では $P(R_{\rm E}) \approx 1\,{\rm bar} = 10^5\,{\rm Pa} \approx 0$ である. これから $P_0 = (2\,\pi/3)\,G\,\varrho_0^2\,R_{\rm E}^2$ が出て, さらに(A.31) 右辺の表式が出る. さて, 中心の圧力 $P_0$ を数値的に評価すると

$$P_0 = \frac{2\,\pi}{3}\,G\,\varrho_0^2\,R_{\rm E}^2 = \frac{\varrho_0\,g\,R_{\rm E}}{2} \approx 3\times 10^{11}\,{\rm Pa}$$

となる. この際 $(4\,\pi/3)\,\varrho_0\,R_{\rm E}^3 = M_{\rm E}$ と $g = GM_{\rm E}/R_{\rm E}^2$ とを使った.

## 39.1 地球軌道に対する周長と半径の比

シュワルツシルト計量で, は周長 $U$ と直径 $D$ は

$$U = 2\,\pi\,r \qquad と \qquad D = 2\int_0^r dr'\,\sqrt{A(r')}$$

で与えられる. このとき, $A(r)$ は

$$A(r) = \left[1 - \frac{2\,G\mathscr{M}(r)}{c^2\,r}\right]^{-1}$$

で与えられ $r \le R_\odot$ に対しては $\mathscr{M} = (4\pi/3)\,\varrho_0\,r^3$ であり, $r > R_\odot$ に対しては $\mathscr{M} = M_\odot$ である. これと $r_{\rm S}/R_\odot \ll 1$ とを考慮して前の積分を実行すると

$$\begin{aligned}
\int_0^r dr'\,\sqrt{A(r')} &= \int_0^{R_\odot} dr'\left[1 - \frac{r_{\rm S}}{R_\odot}\,\frac{r'^2}{R_\odot^2}\right]^{-1/2} + \int_{R_\odot}^r dr'\left[1 - \frac{r_{\rm S}}{r'}\right]^{-1/2} \\
&= R_\odot\int_0^1 dx\left[1 - \frac{r_{\rm S}}{R_\odot}\,x^2\right]^{-1/2} + R_\odot\int_1^{r/R_\odot} dx\left[1 - \frac{r_{\rm S}}{R_\odot}\,\frac{1}{x}\right]^{-1/2} \\
&= R_\odot\int_0^1 dx\left[1 + \frac{r_{\rm S}}{2\,R_\odot}\,x^2\right] + R_\odot\int_1^{r/R_\odot} dx\left[1 + \frac{r_{\rm S}}{2\,R_\odot}\,\frac{1}{x}\right] \\
&= r + \frac{r_{\rm S}}{2}\left[\frac{1}{3} + \ln\frac{r}{R_\odot}\right]
\end{aligned}$$

を得る. これから求める比に対して

$$\frac{周長}{直径} = \frac{U}{D} = \pi\left[1 - \frac{r_{\rm S}}{2\,r}\left(\frac{1}{3} + \ln\frac{r}{R_\odot}\right)\right] \approx \pi\left(1 - 6\times 10^{-8}\right) < \pi$$

を得る. 結果の $U/D < \pi$ は正の空間曲率を意味している.

## 47.1 星の崩壊に対するサイクロイド解

$c\,t = R(0)\,(\,\psi + \sin\psi\,)/(2\,k^{1/2})$ と $R = R(0)\,(\,1 + \cos\psi\,)/2$ は微分方程式

$$\dot{R}^2 = k\,\frac{R(0) - R(t)}{R(t)} \tag{A.32}$$

を満たすことを示すことにする．そのために次の計算をする．

$$\dot{R} = \frac{dR}{d(c\,t)} = \frac{dR}{d\psi}\,\frac{d\psi}{d(c\,t)} = \frac{R(0)}{2}\,(\,-\sin\psi)\,\frac{2\sqrt{k}}{R(0)}\,\frac{1}{1+\cos\psi}$$

これによって（A.32）の左辺は

$$\text{左辺} = \dot{R}^2 = k\,\frac{\sin^2\psi}{(\,1+\cos\psi\,)^2}$$

となる．次いで(A.32) の右辺を計算する．

$$\text{右辺} = k\,\frac{R(0)-R(t)}{R(t)} = k\,\frac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi} = k\,\frac{\sin^2\psi}{(\,1+\cos\psi\,)^2}$$

最後の段階で分子と分母に因子 $(1+\cos\psi)$ を掛けた．これによって与えられた関数 $R(\psi)$ と $t(\psi)$ に対して（A.32）の右辺と左辺が一致することが示された．これらの関数はよって一つの解を構成する．

## 50.1 ロバートソン－ウォーカー計量における質量粒子の運動量

等方性と一様性のために，座標 $x^0 = c\,t$ と $x^1 = \chi$ とをもつ計量

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 = c^2\,dt^2 - R(t)^2\,d\chi^2$$

を考えるだけで十分である．計量テンソル

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R(t)^2 \end{pmatrix}, \qquad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/R(t)^2 \end{pmatrix}$$

に対して，次のクリストッフェル記号だけがゼロでない．

$$\Gamma^0_{11} = -\frac{g^{00}}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = R(t)\,\dot{R}(t), \qquad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{g^{11}}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$$

4 元速度の第 1-成分と“通常の”相対論的運動量 $p$ は

$$u^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{d\chi}{d\tau}, \qquad u_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = -R(t)^2\,\frac{d\chi}{d\tau}$$
$$p = m\,\sqrt{-u^1\,u_1} = m\,R(t)\,\frac{d\chi}{d\tau}$$

である．ここで $x^1(\tau)$ に対する運動方程式

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} = \frac{d^2x^1}{d\tau^2} = -2\,\Gamma^1_{10}\,u^1\,u^0 = -\frac{2\,\dot{R}(t)}{R(t)}\,\frac{d\chi}{d\tau}\,\frac{d(c\,t)}{d\tau}$$

が必要である．これを使って次の計算をする．

$$\begin{aligned}\frac{d}{d(c\,t)}\left[R(t)\,p(t)\right] &= m\,\frac{d}{d(c\,t)}\left[R(t)^2\,\frac{d\chi}{d\tau}\right]\\ &= 2\,m\,R(t)\,\dot{R}(t)\,\frac{d\chi}{d\tau} + m\,R(t)^2\,\frac{d^2\chi}{d\tau^2}\,\frac{d\tau}{d(c\,t)}\\ &= 2\,m\,R(t)\,\dot{R}(t)\,\frac{d\chi}{d\tau} - m\,R(t)^2\,\frac{2\,\dot{R}(t)}{R(t)}\,\frac{d\chi}{d\tau} = 0\end{aligned}$$

これによって自由落下粒子の運動量は $p(t) \propto 1/R(t)$ のように変わる．膨張宇宙では粒子は弱まっていく重力場に向かって走り，その際エネルギーを失う．光の波長も同様にスケール因子 $R(t)$ をもつ（量子力学的）波長 $\lambda = 2\,\pi\,\hbar/p$ で測られる．

# 索　引

**あ**
アインシュタイン
　—宇宙, 373
　-ドジッター宇宙, 370, 372, 378
　—の相対性原理, 7–9
　—の場の方程式, 137–143, 146–154

**い**
一般相対論の実験的検証, 205–210, 244

**う**
宇宙, 341
　インフレーション—, 400
　—の地平線問題, 399–400
　—の一様性, 341–342, 393, 399–400
　—の遠距離測定, 358–364
　—の温度, 386–394
　—の可視領域, 355, 400
　—の曲率, 344–349, 376–378
　—の計量, 341–349
　—の現在の状態, 376–381, 387
　—の質量密度, 376–381, 393
　—の初期, 386–389, 391
　—のスケール因子, 344, 350
　—の地平線, 354–355, 380, 399
　—の等方性, 341–342, 392
　—の年齢, 353, 379–380
　—の背景放射, 387, 390–394
　標準—宇宙モデル, 386–400
　—モデル, 369–374
宇宙検閲仮説, 336
宇宙原理, 342, 393
宇宙定数, 142–143, 365, 368–374, 382–384
宇宙の状態, 375–385
運動方程式
　光子の—, 65, 166–173
　コマの軸の—, 129–132, 190, 198
　質量粒子の—
　　重力場中の—, 63–64, 123, 128–129, 166–171
　　相対論的な—, 17–18, 128–129, 166–171
　　ニュートンの—, 2, 17
　電磁場中の荷電粒子の—, 31, 134

**え**
衛星実験室(局所慣性系も見よ), 57, 59
エーテル, 48
エトベッシュの実験, 58
エネルギー運動量関係式, 19
エネルギー運動量テンソル, 40–45
　重力場の—, 134, 148–150
　重力波の—, 223–227
　電磁場の—, 31
　理想流体の—, 38

エネルギー運動量保存則, 40–42
遠隔作用則, 4
遠距離測定
宇宙の—, 358–364
ロバートソン－ウォーカー計量における—, 361–364

お
オイラー方程式(流体力学の), 34
オッペンハイマー－ボルコフ
—質量限界, 271, 299
—方程式, 277
オルバースのパラドックス, 384–385
温度
宇宙の—, 386–394
太陽の—, 266
白色矮星の—, 270
ブラックホールの—, 332

か
カー計量, 335
回転(rot), 108
ガウス座標, 313–315
ガウスの曲率, 115
加速度基準系, 50–55
ガリレイ
—群, 9
—変換, 8–9
干渉計測器, 250–253
慣性系, 7–9, 47–50
—と宇宙の質量分布との関係, 307
慣性質量, 3
ガンマ線バースト, 324

き
疑球面, 81
基準系, 7–10, 47–55
軌道曲線(中心場の), 166–173
共動座標, 314
共変(形式不変), 8, 89, 91, 121
共変原理, 119–127
共変成分, 23
共変導関数, 94–97
共変な方程式, 93, 109, 124, 127
共変微分, 97
局所慣性系, 60–62, 121
の回転, 197–201
曲率, 79–84, 101, 103–104, 110–116, 344–349
ガウスの—, 115
内的—, 外的—, 81, 114
曲率テンソル, 110–116
巨大引力源(グレート・アトラクター), 364
銀河, 341
典型的な—, 344
近日点移動, 179–185, 208

く
空間の等方性, 119, 126
クエーサー(準星), 337–338, 355
クォーク星, 272
クリストッフェル記号, 65–67, 158–159, 303, 315
クルスカル計量, 312

け
計量
ガウス座標における—, 313–315
クルスカル—, 312
時間に依存する等方な—, 303–305, 313–315
シュワルツシルト—, 161–165
内部—, 274–278
等方かつ静的な—, 155–156
等方形の—, 160
標準形, 155–159
ミンコフスキー, 11, 89
ロバートソン－ウォーカー—, 341–349
計量テンソル, 51, 62, 105–108
ゲージ変換

一般相対論の—, 214, 216
電気力学の—, 30, 147, 211
減速パラメター, 352, 363

こ
光速, 9, 356–357, 380
光度(星，銀河), 358–361
光度距離, 358
勾配, 107
コマの歳差, 130–132, 190–201, 208
固有時, 15–16

さ
サイクロイド, 321
座標系, 7, 47–55, 111
座標変換
一般—, 59, 62, 88–93, 120
ガリレイ変換, 8–9
直交—, 8, 119
ローレンツ変換, 7–15, 23–28, 120, 126
三角測量, 359

し
時間遅れ, 16
4 重極放射, 228–237
事象の地平線
ブラックホールの—, 332, 336
質量，慣性—，重力—, 57–59, 205
質量とエネルギーの等価性, 20
ジャイロスコープ, 190, 198
重力, 1, 65, 67, 334
重力子, 213, 218, 239
重力磁気力, 201–204, 209
重力質量, 3
重力赤方偏移, 70–77, 206, 284
重力定数, 1
重力波, 211–227
重力波計測器, 250–258
重力波の場における長さの変化, 220–222, 250–251
重力波放射, 228–258
重力波放射の波源, 238–249
重力崩壊, 316–325, 327–332
重力ポテンシャル
スカラー—, 2
相対論的な—, 55, 62
有効中心力ポテンシャルとしての—, 170–173
重力レンズ, 178
縮約(テンソルの添字の), 26, 92
シュテファン－ボルツマンの法則, 389
シュワルツシルト
—計量, 161–165, 274–278, 305
—半径, 163–165, 308–312, 330, 331
瞬間的な静止系, 17, 31, 37, 121, 126, 129
状態方程式, 35, 264, 279
真空エネルギー密度, 143, 382–384

す
水星(近日点移動), 180, 182
スカラー曲率, 112
スカラー積, 93
スケール因子(ロバートソン－ウォーカー計量，宇宙), 344
スピン(古典的な)
—の歳差, 130–132, 190–201
—ベクトル, 129
スピン(量子力学的な)
光子の—, 213
重力子の—, 213, 218

せ
静止質量, 17
赤方偏移
宇宙—, 350–353
重力—, 70–77, 206, 284
赤方偏移と距離の関係, 350–357, 363
絶対時空構造, 47–48
線形化された場の方程式, 150–152

**そ**
双極放射(電磁波), 228–231
相対性原理, 7
　アインシュタインの—, 7–9, 48
　ガリレイの—, 7–9
測地線, 84–86
測地線歳差, 190–194
速度の加法則, 14

**た**
ダーク・エネルギー, 382–384
ダーク・マター, 381
対称性原理, 126
太陽
　—の 4 重極モーメント, 184
　—の平衡, 265

**ち**
遅延ポテンシャル, 152
地平線
　宇宙の—, 355, 380, 399
　ブラックホールの—, 332, 336
地平線問題, 399
チャンドラセカール限界質量, 269, 294
中心力場
　—における運動, 166–173
中性子星, 271–272, 297–299
超光速, 356–357
超新星, 322–325
超大質量星, 338

**て**
ティリング - レンゼ効果, 195–201, 209
電気力学
　重力場中の—, 132–134
　双極放射の—, 228–231
　平面波の—, 211–213
テンソル，テンソル場
　ミンコフスキー空間の—, 23–28
　ユークリッド空間の—, 119
　リーマン空間の—, 87–93

**と**
等価原理, 57–62, 119, 126, 205–206
　弱い—，強い—, 59
トーマス歳差, 131–132
特殊相対性理論, 7–45
ドジッター歳差, 193–194
ドップラー効果, 33, 350, 355, 364, 380, 393

**に**
ニュートン
　—極限, 67–69, 137
　—の星, 287–290
　—の運動方程式, 2, 17
　—の重力理論, 1–3
　—の力, 17

**の**
ノルトヴェト効果, 206

**は**
バーコフの定理, 303–305
背景放射(宇宙の), 390–394
パウリ原理, 267
白色矮星, 266–270, 291–296
発散, 108
ハッブル・ダイアグラム, 353, 354
ハッブル定数, 352, 363
場の方程式
　重力の—, 137–145, 146–154
　　線形化された—, 150–152
　　ニュートンの—, 2, 137
　　もう一つの—, 143–145
　静電気学の—, 2
　電気力学の—, 5, 29–31, 132
　流体力学の—, 35, 134
場の方程式の非線形性, 6, 144, 147, 183
パルサー, 300–302
　—重力波放射, 243–244
反変成分, 23, 90

**ひ**
ビアンキの恒等式, 124–125
PSR 1913+16, 243
光の湾曲, 175–178, 207
ビッグバン, 386, 389
標準形の計量, 155–159

**ふ**
フェルミ移動, 132
フェルミ運動量, 291
フェルミ気体, 262, 267, 291–292, 297–299
双子のパラドックス, 22, 53
負の圧力, 382–384
ブラックホール, 165, 332–337
プランク質量, 153
プランク長, 336, 382
プランクの放射分布, 359, 390–394
ブランス-ディッケ理論, 144–145
フリードマン・モデル, 368–369

**へ**
平行移動, 98–104
平坦性問題, 397
平面波, 211–218, 221, 223–224
ヘリシティ, 217–218
ヘルツシュプルング－ラッセル図, 359
偏波, 212, 214, 217, 221

**ほ**
ポアンカレ群, 12
放射
　重力波—, 231–232
　電磁波—, 229–231
ホーキング効果, 332
星, 262–339
　—質量欠損, 285–286
　ニュートンの—, 287–290
　—の安定性, 283, 290
　—の状態方程式, 264, 279
　—の平衡, 262–302
　—の崩壊, 316–325, 327–332
ポスト・ニュートン近似, 147, 203, 209

**ま**
マイケルソン－モーレイの実験, 9, 48
マクスウェル方程式, 29–31, 132
マッハ原理, 49–50, 200, 306–307

**み**
ミンコフスキー
　—計量，—空間, 11, 24–28, 89
　—テンソル, 23–28
　—力, 18

**む**
無毛仮説, 335

**め**
メスバウアー効果, 74

**や**
ヤコビの行列式，ヤコビアン, 106

**ゆ**
ユークリッド空間, 82, 103, 110

**よ**
弱い重力場, 67, 148
4 元運動量, 19
4 元速度, 17
4 元テンソル(ローレンツ・テンソル), 23–28

**ら**
ラグランジュ関数
　重力場中の粒子の—, 84–85
　電磁場中の粒子の—, 33
ラグランジュ密度(一般相対論の), 143
ラピディティ, 14

**り**
リーマン空間, 61, 79, 84, 86–93, 105, 110
リーマン空間でのガウスの定理, 109

リーマン・テンソル, 87–93, 122–123
リッチ・テンソル, 112, 139, 159, 304, 315
流体力学, 34–39, 134
量子効果
  ウェーバー計測器における—, 257
  重力場に対する—, 152–154, 239
  重力波に対する—, 213
  ホーキング効果, 332
臨界質量密度, 376

**る**

ルメートル宇宙, 371

**れ**

レヴィ-チヴィタ記号, 26, 88
レーザー干渉計, 251
レーダー反射波の遅れ, 186–189, 208
連星系
  —からの重力波放射, 242–243
連続方程式
  電気力学の—, 29, 134
  流体力学の, 34

**ろ**

ローレンツ
  ・テンソル, ・ベクトル, ・スカラー, 23–28
ローレンツ変換, 7–15, 23–28
ロバートソン-ウォーカー計量, 341–349
ロバートソン展開, 157–158, 165, 207

**わ**

和を取る規約, 8

Memorandum

Memorandum

**著者紹介**
**Torsten Fließbach** (Torsten Fliessbach, トールステン　フリースバッハ)
略歴：1968年　理学博士(Technical University of München)
　　　1979年　Siegen 大学教授
　　　2005年　Siegen 大学名誉教授
専攻：極低温物理学
著書：理論物理学シリーズ：Mechanik (力学), Spektrum Akademischer Verlag (1999), Elektrodynamik (電気力学), Spektrum Akademischer Verlag (1997), Quantenmechanik (量子力学), Spektrum Akademischer Verlag (1995), Statistische Physik (統計物理学), Spektrum Akademischer Verlag (1995), Allgemeine Relativitätstheorie (一般相対性理論), Spektrum Akademischer Verlag (2002)

**訳者紹介**
**杉原　亮** (すぎはら りょう)
略歴：1964年　東京大学大学院数物系研究科
　　　現　在　名古屋大学名誉教授，理学博士
専攻：プラズマ物理学，核融合理工学
著書：「超小型加速器〈プラズマ・レーザー加速器〉」，アイピーシー (1998) (共著)

**庄司多津男** (しょうじ たつお)
略歴：1976年　名古屋大学大学院理学研究科
　　　現　在　名古屋大学大学院工学研究科 助教授，理学博士
専攻：プラズマ物理学，核融合理工学
著書：「核融合・原子力発電」，クロスロード社 (1985) (共著)，「プラズマの生成と診断」，コロナ社 (2004) (分担)

**南部保貞** (なんぶ やすさだ)
略歴：1989年　広島大学大学院理学研究科
　　　現　在　名古屋大学大学院理学研究科 助教授，理学博士
専攻：一般相対性理論

**一般相対性理論**

2005 年 10 月 25 日　初版 1 刷発行

訳　者　杉原　亮，庄司多津男，南部保貞　©2005
発行者　南條光章
発行所　**共立出版株式会社**
郵便番号 112-8700
東京都文京区小日向 4-6-19
電話　東京(03) 3947-2511 番
振替口座 00110-2-57035 番
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷
製　本　加藤文明社

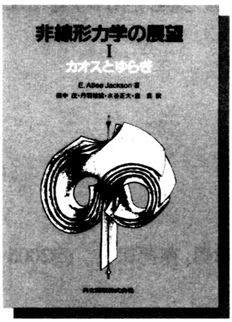
検印廃止
NDC 421.2
ISBN 4-320-03442-2
Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

# 非線形力学の展望 全2巻

**E.Atlee Jackson 著**
**田中　茂・水谷正大・丹羽敏雄・森　真 訳**

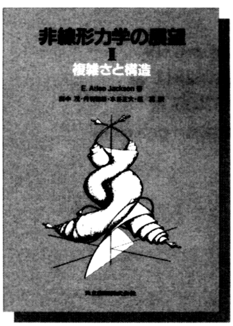
物理学，数学，化学，生物学，工学など，ほとんど全ての自然科学分野にわたる非線形現象・モデルを取り上げ，伝統的な解析学，コンピュータによる計算実験，トポロジー，その他の新しい相補的な研究手法を紹介。豊富な図（Ⅰ巻　416図・Ⅱ巻　436図）と，詳細な文献を付し，理解の助けとなるよう配慮。Ⅰ巻では，カタストロフィー，分岐現象，ポアンカレ写像，カオス，非線形振動，エントロピー，フラクタル次元などを，Ⅱ巻では，さらに高次のＫＡＭ理論，可積分系，ローレンツ系，ＦＰＵ現象，戸田格子，形態形成，ソリトン，セル・オートマトン，計算可能性など，重要な概念を全て網羅した。




## Ⅰ カオスとゆらぎ

**B5判・464頁・定価8400円**（税込）

主要目次
1 はじめに…
2 基本概念入門
3 1次微分系（$n=1$）
4 1次差分方程式に基づくモデル
5 2次微分系（$n=2$）




## Ⅱ 複雑さと構造

**B5判・576頁・定価9135円**（税込）

主要目次
6 2次差分方程式に基づくモデル
7 3次微分系に基づくモデル
8 ‘中間次数’システム
9 ソリテールーソリトンと非ソリトン
10 結合写像(CM)とセル･オートマトン(CA)

**共立出版** http://www.kyoritsu-pub.co.jp/